बीजगणित

डिटमिनेंटों, मैट्रिक्सों और
बीजीय समघातों की पाठ्य-पुस्तक

लेखक

डब्ल्यू० एल० फेरार

अनुवादक

ओम प्रकाश वर्मा





वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग
शिक्षा मंत्रालय
भारत सरकार

PED 365
3000

मूल्य
देश में : रु० 9.00
विदेश में : 21शिलिंग या 3 डालर 24 सेन्ट

वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग के तत्वावधान में प्रकाशित इस पुस्तक का अनुवाद श्री ओम प्रकाश वर्मा ने किया है।

काशक : प्रबंधक,
प्रकाशन शाखा,
भारत सरकार,
सिविल लाइंस,
दिल्ली।

मुद्रक : प्रबंधक,
भारत सरकार मुद्रणालय,
फरीदाबाद
1967।

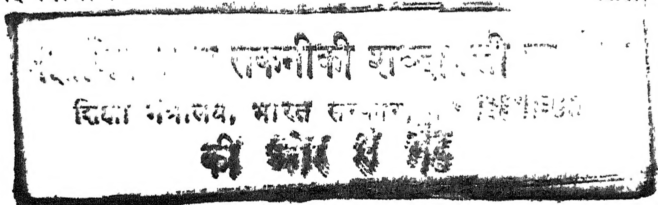
प्रस्तावना

हिंदी और प्रादेशिक भाषाओं को शिक्षा के माध्यम के रूप में अपनाने के लिए यह आवश्यक है कि इनमें उच्चकोटि के प्रामाणिक ग्रंथ अधिक से अधिक संख्या में तैयार किए जाएँ। शिक्षा मंत्रालय ने यह काम अपने हाथ मे लिया है और इसे बड़े पैमाने पर करने की योजना बनाई है। इस योजना के अंतर्गत अंग्रेजी और अन्य भाषाओं के प्रामाणिक ग्रंथों का अनुवाद किया जा रहा है तथा मौलिक ग्रंथ भी लिखाए जा रहे है। यह काम अधिकतर राज्य सरकारों, विश्वविद्यालयों तथा प्रकाशकों की सहायता से आरंभ किया गया है। कुछ अनुवाद और प्रकाशन कार्य शिक्षा मंत्रालय स्वयं अपने अधीन करवा रहा है। प्रसिद्ध विद्वान और अध्यापक हमें इस योजना में सहयोग प्रदान कर रहे हैं। अनूदित और नए साहित्य में भारत सरकार की शब्दावली का ही प्रयोग किया जा रहा है ताकि भारत की सभी शैक्षणिक संस्थाओं में एक ही पारिभाषिक शब्दावली के आधार पर शिक्षा का आयोजन किया जा सके।

यह पुस्तक शिक्षा मंत्रालय द्वारा कार्यान्वित की जाने वाली मानक ग्रंथ योजना के अंतर्गत प्रस्तुत की जा रही है। मूल पुस्तक अंग्रेजी मे है और इसका अनुवाद तैयार किया गया है। हमें विश्वास है कि यह पुस्तक हिंदी भाषा और साहित्य को समृद्ध बनाने और भारतीय भाषाओं के माध्यम से शिक्षा का प्रसार करने मे सहायक सिद्ध होगी। आशा है कि भारत सरकार के इस प्रयास का सभी क्षेत्रों में स्वागत किया जाएगा।

भारत सरकार,
नई दिल्ली।

शिक्षा-मंत्री



द्वितीय संस्करण की भूमिका

इस संस्करण में पिछली अनेक गलतियों को सुधार दिया गया है तथा अभिलक्षणिक वेक्टरों पर एक नया अध्याय जोड़ दिया गया है।

प्रथम संस्करण की भूमिका

इस ग्रंथ के रूप में मैंने डिटर्मिनेंटों, मैट्रिक्सों, और बीजीय समघातों के प्राथमिक गुणधर्मों के ऊपर एक पाठ्य-पुस्तक सम्मुख रखने का प्रयत्न किया है। डिटर्मिनेंटों और मैट्रिक्सों पर परिच्छेद, जो पुस्तक के भाग I और II में दिए गए हैं, कुछ सीमा तक या तो पूर्वस्नातकों के लिए अथवा स्कूलों में अंतिम वर्ष के छात्रों के लिए उपयुक्त हैं। भाग III विश्वविद्यालय में अध्ययन के लिए उपयुक्त है और स्कूल की पढ़ाई की दृष्टि से इसे नहीं लिखा गया है।

यह पुस्तक मुख्य रूप से पूर्वस्नातकों के लिए लिखी गई है। मेरी दृष्टि में, विश्वविद्यालय में गणित के अध्ययन से कम-से-कम दो चीजें तो आ ही जानी चाहिएं। प्रथम यह है कि गणित की किसी भी शाखा के उन सिद्धांतों और प्रमेयों का विस्तृत ज्ञान जिनका दूसरी शाखाओं में प्रायः प्रयोग होता हो, द्वितीय यह कि गणित की किसी विशेष शाखा में विस्तृत और विशद् ज्ञान की उपलब्धि के लिए प्रेरणा, प्रोत्साहन और अवसर। बाजार में उपलब्ध पुस्तकों में इनमें से दूसरी के लिए पर्याप्त सामग्री मिल जाती है विशेषकर तब जब विद्यार्थी को कम-से-कम एक विदेशी भाषा की काम-चलाऊ जानकारी हो जैसी कि उसे होनी चाहिए। लेकिन हमारे पास ऐसी पुस्तकों की अत्यंत कमी है जो किसी भी विषय या प्रकरण को इस रूप में दे सकें कि उसे किसी पूर्वस्नातक की गणित-शिक्षा का आवश्यक भाग कहा जा सके।

इसलिए, सामान्य रूप में यह पुस्तक उसी ढाँचे में लिखी गई है जो अभिसरण (convergence) पर लिखी गई मेरी पुस्तक का है। मैंने उन प्रकरणों को इसमें शामिल किया है जिनकी शुद्ध (pure) और अनुप्रयुक्त (applied) गणित में विश्वविद्यालय के ऑनर्स के पाठ्यक्रम में साधारणतया आवश्यकता होती है: उन प्रकरणों को इसमें नहीं रखा गया है जो उत्तरस्नातकों के लिए अथवा अध्ययन के बहुत अधिक विशेषोपयुक्त पाठ्यक्रम के लिए उपयुक्त हों।

बीजगणित के अधिक अध्ययन में मार्गदर्शन के लिए कुछ पुस्तकें, जिनका मैं ऋणी हूँ पाठकों के सम्मुख रखी जा सकती हैं। बिना इस आशय के कि इस सूची में ऐसी समस्त पुस्तकें आ जाती हैं—मैं निम्नलिखित का उल्लेख करूँगा : स्कॉट एण्ड मैथ्यूज, **थ्योरी ऑफ डिटर्मिनेंट्स**; बोकर, **इंट्रोडक्शन टू हायर अलजेब्रा**; डिक्शन, **मॉडर्न अलजब्रैक थ्योरीज**; एट्कन, **डिटर्मिनेंट्स एण्ड मैट्रिसेज**; टर्नबुल, **द थ्योरी ऑफ डिटर्मिनेंट्स, मैट्रिसेज एण्ड इंवेरिएंट्स**; टर्नबुल एण्ड एट्कन, **द थ्योरी ऑफ कैनॉनिकल मैट्रिसेज**; ईलिअट, **इन्ट्रोडक्शन टू द अलजेब्रा ऑफ क्वांटिक्स**; सॉलमन, **माडर्न हायर अलजेब्रा** (यद्यपि 'माडर्न' अर्थात् 'आधुनिक' शब्द यहाँ लगभग साठ वर्ष पहले के संदर्भ

में आता है) ; बर्नसाइड एण्ड पैंटन, थ्योरी ऑफ इक्वेशन्स । इसके अतिरिक्त मैं प्रोफेसर ई० टी० ह्विटेकर का ऋणी हूँ, मैट्रिक्सों पर जिनके अमूल्य 'रिसर्च लैक्चर्स' को मैंने कई साल पहले एडिनबरा में पढ़ा था, यद्यपि यहाँ इनका हवाला पाठकों के लिए उपयोगी नहीं है।

इस पुस्तक में बहुत-सी बातें छोड़ दी गई हैं। मेरा विश्वास है कि वे सब जानबूझ कर ही छोड़ी गई हैं। यह कठिन काम नहीं होता कि कहीं पर समीकरण-सिद्धांत (Theory of equations) और विलोपन-फलों (eliminants) के बारे में कुछ कह दिया जाता, या किसी स्थल पर ग्रूप (group) के अभिप्राय का प्रवेश करा दिया जाता, या संख्या-रिंगों (number rings) और फील्डों (fields) की इस तरह व्याख्या की जाती कि आधुनिक अमूर्त बीजगणित (abstract algebra) के संबंध में कुछ संकेत मिल जाते। स्पष्ट है कि पूर्वस्नातकों के लिए लिखी गई ऐसी कोई पुस्तक जिसमें उपर्युक्त एक या अधिक प्रकरणों का समावेश हो विश्वविद्यालय की बहुमूल्य पाठ्य-पुस्तकों में एक अधिक की वृद्धि कर देगी, लेकिन मेरा विचार है कि यदि गंभीरता से इनका विस्तार नहीं करना हो तो इनके संदर्भों से भी अधिक लाभ नहीं होगा।

पांडुलिपि की स्थिति में ही, इस पुस्तक का कुछ भाग, मेरे मित्र और सहयोगी स्वर्गीय श्री जे० हॉज़किन्सन ने पढ़ा है, बीजगणित पर जिनके अनुपम व्याख्यान ऑक्सफोर्ड में अनेकों द्वारा याद किए जाएँगे। संदर्भों की जाँच और प्रूफ़ जाँचने के कठिन कार्य में मुझे प्रोफेसर ई० टी० कॉप्सन से अमूल्य सहायता मिली है जिन्होंने समस्त प्रूफों को पढ़ा और लगभग सभी उदाहरणों और प्रश्नों की जाँच करी। इस कार्य के लिए, और विशेष रूप से उनकी समालोचना के लिए मैं उनका अत्यंत आभारी हूँ जिसके कारण पाठ्य-पुस्तक में से मैं अनेकों दोषों को दूर कर सका।

अंत में, प्रकाशन और मुद्रण की दृष्टि से इस पुस्तक में किए गए अत्युत्तम कार्य के लिए मैं यूनिवर्सिटी प्रेस के कर्मचारियों को धन्यवाद देता हूँ। (अधिकतर अन्य लोगों के) गणित के ग्रंथों के मुद्रण से मेरा कई साल से संबंध रहा है और आजतक मुझे उस धैर्य और कुशलता पर आश्चर्य होता है जिसकी किसी गणितीय पुस्तक या पत्रिका के मुद्रण में आवश्यकता होती है।

हर्टफोर्ड कॉलिज, डब्ल्यू० एल० एफ०

ऑक्सफोर्ड, सितम्बर, 1940।

विषय-सूची

भाग I

डिटर्मिनेंट

अध्याय		पृष्ठ
	परिचय नोट : (संख्या, संख्या रिंग, फील्ड और मैट्रिक्स)	1
1	डिटर्मिनेंटों के प्राथमिक गुणधर्म	5
2	डिटर्मिनेंट के उपसारणिक	30
3	दो डिटर्मिनेंटों का गुणनफल	44
4	जैकोबी का प्रमेय और उसके विस्तार	60
5	सममित और विषम-सममित डिटर्मिनेंट	64

भाग II

मैट्रिक्स

6	परिभाषाएँ और प्राथमिक गुणधर्म	71
7	संबंधित मैट्रिक्स	88
8	किसी मैट्रिक्स का क्रम	99
9	मैट्रिक्सों के सहचारी डिटर्मिनेंट	117

भाग III

एकघाती और द्विघाती समघात

10	बीजीय समघात : एकघाती रूपांतरण	127
11	धनात्मक-निश्चित समघात	144
12	अभिलक्षण-समीकरण और विहित समघात	153
13	लांबिक रूपांतरण	170
14	निश्चर व सहचर	180
15	अभिलक्षणिक वेक्टर	214
	पारिभाषिक शब्द-सूची	233

भाग I

परिचय नोट : डिटर्मिनेंटों (Determinants) पर अध्याय

परिचय नोट

1. संख्या (Number)

प्रारंभिक बीजगणित को प्रारंभिक अंकगणित का ही एक व्यापक रूप कहा जा सकता है। इसमें केवल धन पूर्णांकों (positive integers) का ही अध्ययन किया जाता है। 1, 2, 3. . ., आदि संख्याएँ हैं। हमें उन प्रश्नों की याद होगी जिन्हें हम ऐसे शुरू करते थे—मान लीजिए अंडों की संख्या x है और यदि x का मान $3\frac{1}{2}$ आ जाता था तो हम समझ जाते थे कि उत्तर गलत है, क्योंकि अंडे 3 या 4 तो हो सकते हैं, $3\frac{1}{2}$ नहीं हो सकते। उच्च अध्ययन में x ऋण अथवा शून्य भी हो सकता है। वह दो पूर्ण संख्याओं का अनुपात भी हो सकता है। और फिर, वह कोई भी वास्तविक संख्या (real number) हो सकता है—चाहे वह $3\frac{1}{3}$ और $-\frac{1}{4}$ की तरह परिमेय (rational) हो या π और $\sqrt{3}$ की तरह अपरिमेय (irrational)। और अंततः द्विघात समीकरणों (quadratic equations) को हल करते समय x एक सम्मिश्र संख्या (complex number) हो जाता है जब उसका रूप $2+3i$ सा हो जाता है।

इस पुस्तक में प्रयोग की हुई संख्याएँ वास्तविक भी हो सकती हैं और सम्मिश्र भी। हम यह मान लेते हैं कि पाठक को इनकी परिभाषाओं की सूक्ष्मता का थोड़ा-बहुत ज्ञान है तथा उसने उन नियमों का अध्ययन किया है जो इन संख्याओं के जोड़, घटाने, गुणन तथा भाग में लागू होते हैं।

2. संख्या रिंग (Number rings)

$$0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \tag{1}$$

संख्याओं के समुच्चय (set) पर विचार कीजिए। और मान लीजिए r, s संख्याएँ (1) में से चुनी हुई कोई दो संख्याएँ हैं। तब, $r+s$, $r-s$, $r\times s$ संख्याएँ भी (1) में होंगी। चाहे r और s एक ही संख्या को द्योतित करें या भिन्न-भिन्न संख्याओं को।

समुच्चय (1) का यह गुणधर्म (property) संख्याओं के अन्य समुच्चयों में भी मिलता है। उदाहरणार्थ, यदि a और b समुच्चय (1) में से हैं तो

$$a+b\sqrt{5}, \tag{2}$$

की तरह की सभी संख्याओं में भी वही गुणधर्म होगा; और यदि r और s समुच्चय (2) में से हैं तो $r+s$, $r-s$ और $r\times s$ भी उसमें होंगे। संख्याओं के ऐसे गुणधर्म वाले समुच्चय को संख्याओं का रिंग कहते हैं।

3. संख्या फील्ड (Number fields)

3.1. संख्याओं के उस समुच्चय पर विचार कीजिए जिसमें 0 तथा p/q के रूप की प्रत्येक संख्या आ जाती है जब p और q दोनों (1) में से हे तथा q शून्य नहीं है—अर्थात्,—

सारी परिमेय-वास्तविक-संख्याओं का समुच्चय (3)

मान लीजिए r और s उपर्युक्त (3) में से चुनी हुई संख्याएँ हैं। यदि s शून्य नहीं है तब $r+s$, $r-s$, $r\times s$, $r\div s$ सारी संख्याएँ (3) में होंगी चाहे r और s एक ही संख्या को द्योतित करे या भिन्न-भिन्न संख्याओं को।

यही गुणधर्म संख्याओं के फील्ड (field) का लक्षण है। यह गुणधर्म विभिन्न अन्य समुच्चयों के अतिरिक्त निम्नलिखित समुच्चयों में होता है :—

समस्त सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय; (4)

समस्त (परिमेय या अपरिमेय) वास्तविक संख्याओं का समुच्चय (5)

$p+q\sqrt{3}$ के रूप की समस्त संख्याओं का समुच्चय, जहाँ p और q दोनों (3) में से हैं। (6)

समुच्चय (4), (5) और (6) में से प्रत्येक से एक फील्ड बनता है।

परिभाषा :—**वास्तविक अथवा सम्मिश्र संस्थाओं के एक समुच्चय द्वारा संख्याओं का एक फील्ड बना हुआ तब कहा जाता है जब $r+s$, $r-s$, $r\times s$, $r\div s$ भी उस समुच्चय में हो जिसमें से r और s लिए गए हों तथा s शून्य न हो।**

यह ध्यान देने योग्य है कि समुच्चय (1) कोई फील्ड नहीं है; क्योंकि यद्यपि संख्या 1 और 2 उसमें हैं पर संख्या $\frac{1}{2}$ उसमें नहीं है।

3.2. इस पुस्तक के अधिकतर साध्यों में इस बात की कल्पना कर ली गई है कि सारा विचार-विमर्श संख्याओं के एक फील्ड के अंतर्गत ही होगा; वह विशेष फील्ड कौन-सा होगा यह महत्त्वपूर्ण नहीं है।

पुस्तक के आरंभ के भाग में इस बात पर अधिक जोर देने की आवश्यकता नहीं है : बाद के कुछ अध्यायों में प्रमेय का सार यह होगा कि उसके द्वारा की गई सभी संक्रियाएँ (operations) संख्याओं के किसी दिए हुए फील्ड के अंतर्गत ही लागू हो सकती हैं।

इस प्राथमिक नोट में हमारा ध्येय संख्याओं के किसी फील्ड की केवल परिभाषा देना तथा पाठक को उसमें निहित विचारों से अवगत कराना ही होगा।

4. मैट्रिक्स (Matrices)

वास्तविक अथवा सम्मिश्र, m n संख्याओं के उस समुच्चय को जिसको m स्तंभों (columns) तथा n पंक्तियों (rows) की सरणियों (arrays) में रखा गया हो, मैट्रिक्स कहते हैं। इस प्रकार निम्नलिखित एक मैट्रिक्स है :

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2m} \\ & . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nm} \end{matrix}$$

यदि $m = n$ हो तो हम इसे n कोटि (order) का वर्ग मैट्रिक्स (square matrix) कहते हैं।

n कोटि के किसी दिए हुए वर्ग मैट्रिक्स का अनेकों बीजीय व्यञ्जकों से साहचर्य (association) स्थापित किया जा सकता है। उपर्युक्त मैट्रिक्स में यदि $m = n$ हो तो उसका क्रमशः निम्नलिखित से साहचर्य है :

(i) डिटर्मिनेंट $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$ से ;

(ii) समघात (form) $\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_r x_s$ से,

जो कि n चर (variables) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ में द्वितीय घात (degree) का है।

(iii) द्विएकघाती समघात (bilinear form)

$\sum_{r=-}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_r y_s$ से,

जो कि 2n चर $x_1, \ldots, x_n$ तथा $y_1, \ldots, y_n$ में है।

(iv) हर्मिटीय समघात (Hermitian form)

$\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_r \bar{x}_s$ से,

जहाँ $\bar{x}_s$ और x_s संयुग्मी सम्मिश्र संख्याएँ (conjugate complex numbers) हैं।

(v) निम्नलिखित एकघाती रूपांतरों (linear transformations) से—

$$x_r = \sum_{s=1}^{n} a_{rs} X_s \ (r=1,\ldots,n),$$

$$L_s = \sum_{r=1}^{n} a_{rs} l_r \ (s=1,\ldots,n).$$

मैट्रिक्स ग्रौर उसके सहचारी समघातों के सिद्धांतों का आपस में बड़ा घनिष्ट संबंध है। इन सिद्धांतों को मैं मोटे तौर पर इस प्रकार प्रस्तुत करूँगा : भाग I में डिटर्मिनेंट के गुणधर्मों का विकास; भाग II में मैट्रिक्सों के बीजगणित का विकसित वर्णन। डिटर्मिनेंटों के विषय में किसी प्रमाण अथवा निष्कर्ष की आवश्यकता होने पर भाग I का ही हवाला भी दे दिया जाएगा; भाग III में अन्य सहचारी समघातों के सिद्धांतों का विकास किया जाएगा।

अध्याय 1

डिटर्मिनेंटों के प्राथमिक गुणधर्म

(Elementary properties of Determinants)

1. प्रस्तावना

1.1. आगामी अध्यायों के लिए हमने यह मान लिया है कि पाठकों को द्वितीय और तृतीय कोटि (order) के डिटर्मिनेंटों का ज्ञान है। फिर भी इन डिटर्मिनेंटों के प्रमेयों के विषय में हम पहले से कोई कल्पना नहीं करेंगे जिसके फलस्वरूप यहाँ दिया गया वर्णन स्वयं में पूर्ण होगा।

पिछली शताब्दी के मध्य तक डिटर्मिनेंट-संकेतन (Determinant Notation) के उपयोग का ज्ञान गणितज्ञों को नहीं था। लेकिन एक बार शुरू कर देने पर यह इतना अधिक लोकप्रिय हुआ कि अब इसका प्रयोग गणित की प्रायः प्रत्येक शाखा में होता है। इसके सिद्धांतों का इतना अधिक विस्तार और विकास हो चुका है कि शायद ही कोई गणितज्ञ इस बात को कह सके कि वह इनके बारे में सब कुछ जानता है। लेकिन दूसरी तरफ, गणित की अन्य शाखाओं में इस सिद्धांत के जिस भाग का प्रायः प्रयोग होता है वह थोड़ा-सा ही होता है। इस पुस्तक में हम इस सीमित भाग की ही चर्चा करेंगे।

1.2. द्वितीय और तृतीय कोटि के डिटर्मिनेंट—डिटर्मिनेंटों की उत्पत्ति का एकघातीय समीकरणों (linear equations) के साधन से घनिष्ठ संबंध है।

मान लीजिए दो समीकरण

$$a_1x+b_1y=0 \quad \text{और} \quad a_2x+b_2y=0$$

x और y संख्याओं के युग्म से संतुष्ट होते हैं। इनमें कम-से-कम एक संख्या शून्य से भिन्न हो तो—

$$b_2\ (a_1x+b_1y)-b_1\ (a_2x+b_2y)=0,$$

अतः

$$(a_1b_2-a_2b_1)\ x=0$$

इसी प्रकार, $(a_1b_2-a_2b_1)\ y=0$ और इसलिए, $a_1b_2-a_2b_1=0$.

संख्या $a_1b_2-a_2b_1$ डिटर्मिनेंट का एक सरल-सा उदाहरण है; इसको प्रायः ऐसे लिखा जाता है :—

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

पद a_1b_2 को 'अग्रग विकर्ण' (leading diagonal) कहते हैं। चूंकि इसमें दो पंक्तियां (rows) और दो स्तंभ (columns) हैं। इस प्रकार के डिटर्मिनेंट को 'द्वितीय कोटि का' अथवा '2 कोटि का डिटर्मिनेंट' कहा जाता है।

डिटर्मिनेंट का एक गुणधर्म स्पष्ट है। वह यह कि (1) में यदि हम a_1 और b_1; a_2 और b_2 का एक साथ परस्पर विनिमय (interchange) कर दें तो

$a_1b_2-a_2b_1$ के स्थान पर हमें

$b_1a_2-b_2a_1$ प्राप्त होता है।

दूसरे शब्दों में, (1) में दोनों स्तंभों का परस्पर विनिमय करने पर वही पद a_1b_2 और a_2b_1 प्राप्त होते हैं परंतु इस बार उनके क्रम और चिह्न विपरीत होते हैं।

पुनः, मान लीजिए संख्याएँ x, y और z—निम्नलिखित समीकरणों को संतुष्ट करती हैं जब कम-से-कम एक संख्या शून्य से भिन्न है।

$$a_1x+b_1y+c_1z=o, \qquad (2)$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=o, \qquad (3)$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=o, \qquad (4)$$

तो, समीकरण (3) और (4) से—

$$(a_2b_3-a_3b_2)x-(b_2c_3-b_3c_2)z=o$$
$$(a_2b_3-a_3b_2)y-(c_2a_3-c_3a_2)z=o$$

और फिर, समीकरण (2) से—

$$z\left[a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)\right]=o.$$

z के गुणांक (coefficient) को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है :—

$$a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1$$

इसको हम $\triangle$ से प्रकट करेंगे; अतः उपर्युक्त परिणाम $z\triangle=o$.

इसी प्रकार यह दिखाया जा सकता है कि—

$$x\triangle=o, \quad y\triangle=o.$$

और, क्योंकि x, y और z सब ही शून्य नहीं हैं। यह स्पष्ट है कि $\triangle=o$.

संख्या $\triangle$ को प्रायः इस प्रकार लिखते हैं

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

इस रूप में इसको 'तृतीय कोटि का' अथवा '3 कोटि का' डिटर्मिनेंट कहा जाता है। पद $a_1\ b_2\ c_3$ को 'अग्रग विकर्ण' कहते हैं।

1.3. इस प्रकार का आभास-सा होता है कि यदि हमारे पास n चरों में (मान लीजिए, निम्नलिखित) n एकघात समीकरण हैं—

$$a_1x+b_1y+\ldots+k_1z=o,$$
$$a_2x+b_2y+\ldots+k_2z=o,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_nx+b_ny+\ldots+k_nz=o$$

तो गुणांकों का ऐसा कोई विशिष्ट फलन (function) अवश्य है जो स्वयं शून्य हो जाता है यदि सारे समीकरणों को x, y, . . . , z के कुछ मान (values) संतुष्ट करते हैं जो सब एक साथ ही शून्य नहीं है। हमें ऐसा भी आभास होता है कि गुणांकों के इस फलन को सुगमता के लिए हम कदाचित् इस प्रकार प्रकट कर सकते हैं—

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & . & . & k_1 \\ a_2 & b_2 & . & . & k_2 \\ . & . & . & & . \\ a_n & b_n & . & . & k_n \end{vmatrix},$$

इस रूप में फलन को n कोटि (order n) का डिटर्मिनेंट कहा जाएगा और $a_1b_2 . . k_n$ को अग्रग विकर्ण कहेंगे। § 1.2 में द्वितीय कोटि के डिटर्मिनेंट के उपयोग से हमने तृतीय कोटि का डिटर्मिनेंट प्राप्त किया था।

तृतीय कोटि के डिटर्मिनेंट के उपयोग से हम इसी प्रकार चतुर्थ कोटि का डिटर्मिनेंट प्राप्त कर सकते हैं। और इस प्रक्रम से उत्तरोत्तर n कोटि के डिटर्मिनेंट की परिभाषा प्राप्त कर सकते है। लेकिन इसका अर्थ यह नहीं है कि परिभाषा समझने का यही एक मार्ग है। हम अपनी परिभाषा के लिए दूसरी रीति का अनुसरण करेंगे।

हम पहले तृतीय कोटि के डिटर्मिनेंटों के कुछ विशेष गुणधर्मों का अध्ययन करेंगे और फिर n कोटि के डिटर्मिनेंट की परिभाषा इस तरीके से देंगे कि ये गुणधर्म किसी भी कोटि के डिटर्मिनेंट में समान रूप से पाए जा सकें।

1.4. परिभाषाओं पर नोट—n कोटि के डिटर्मिनेट की परिभाषा कई प्रकार से दी जा सकती है यद्यपि उन सब परिभाषाओं का निष्कर्ष एक ही होता है। जिस तरीके से परिभाषा हम देंगे उसमें विशेषता यही है कि वह औरों के द्वारा दी हुई परिभाषाओं से मेल खा जाती है और इसलिए दूसरी पुस्तकों में संदर्भ को सरल कर देता है।

1.5. तृतीय कोटि के डिटर्मिनेंटों के गुणधर्म—जैसा हमने §1.2 में देखा है, डिटर्मिनेंट

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

को इस प्रकार लिख सकते हैं :—

$$+a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1 \qquad (1)$$

निम्नलिखित तथ्य (facts) एक प्रकार से स्वतः सिद्ध (self-evident) और स्पष्ट हैं :—

(I) व्यञ्जक (1) का रूप

$\Sigma \pm a_r b_s c_t$ के प्रकार का है.

जो योग r, s और t को, छः संभावित तरीकों से 1, 2, 3 आदि मान किसी क्रम में देने पर आता है और इसमें किसी भी पद की पुनरावृत्ति (repetition) नहीं होती।

(II) अग्रग विकर्ण के पद $a_1\ b_2\ c_3$ में धन चिह्न (अर्थात् +) लगता है।

(III) जैसा द्वितीय कोटि के डिटर्मिनेंट में होता है, (देखिए § 1.2) यदि व्यञ्जक (1) में सब स्थानों पर किन्हीं भी दो अक्षरों का विनिमय कर दिया जाए तो भी पहले वाले पद ही प्राप्त होते हैं लेकिन इस बार उनका क्रम दूसरा होता है और उनके चिह्न विपरीत होते हैं।

उदाहरणार्थ, यदि (1) में a और b का विनिमय† कर दिया जाए तो हमें निम्नलिखित व्यञ्जक प्राप्त होता है।

$$+b_1a_2c_3-b_1a_3c_2+b_2a_3c_1-b_2a_1c_3+b_3a_1c_2-b_3a_2c_1,$$

इसमें पद वही हैं जो (1) में है लेकिन क्रम दूसरा है और चिह्न भी विपरीत हैं।

2. n कोटि के डिटर्मिनेंट

2.1. तृतीय कोटि के डिटर्मिनेंट में हमने (§ 1.5 में) तीन अनिवार्य गुण-धर्म देखे। अब हम n कोटि के डिटर्मिनेंट की परिभाषा देंगे।

परिभाषा—डिटर्मिनेंट
$$\triangle_n \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & . & j_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & & j_2 & k_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & . & j_n & k_n \end{vmatrix} \quad (1)$$

a, b, . . ., k [a से तात्पर्य $a_1, a_2, \ldots a_n$; आदि से है] आदि का वह फलन है जो निम्नलिखित तीन प्रतिबंधों (conditions) को संतुष्ट करता है :

(I) इस व्यञ्जक का रूप निम्नलिखित प्रकार का है :—

$$\Sigma \pm a_r\, b_s \ldots k_\theta \quad (2)$$

जो योग r, s, . . ., θ आदि को $\underline{|n}$ संभावित तरीकों से 1, 2, . . ., n आदि मान किसी विशेष क्रम में देने पर प्राप्त होता है। और किसी भी पद की पुनरावृत्ति नहीं होती ;

(II) अग्रग विकर्ण के पद, $a_1\ b_2 \ldots k_n$, में धनचिह्न होता है;

(III) अन्य पदों में चिह्न इस प्रकार होते हैं कि (2) में सब स्थानों पर किन्हीं भी दो अक्षरों के विनिमय पर भी पदों के समुच्चय में कोई अंतर नहीं पड़ता अर्थात् पहले वाले पद ही आते हैं लेकिन इस बार उनका क्रम दूसरा होता है और उनके चिह्न विपरीत हो जाते हैं।

---

†**इस पुस्तक में सब स्थानों पर 'a और b के विनिमय' से तात्पर्य a_1 और b_1, a_2 और b_2, a_3 और b_3 . . ., a_n और b_n के युगपत् अर्थात् एक साथ विनिमय simultaneous interchange) से होगा।**

आगे बढ़ने से पहले हमारे लिए यह सिद्ध करना आवश्यक है कि उपर्युक्त परिभाषा से a, b,. . ., k आदि का एक—और केवल एक ही—फलन प्राप्त होता है। इसकी उपपत्ति (proof) को निम्नलिखित चार मुख्य भागों में विभाजित किया जा सकता है।

प्रथम भाग—(1) के स्तंभों के संगत अक्षर a, b,. . ., k आदि को मनवांछित किसी भी क्रम में रखिए, जैसे,

$$\ldots, d, g, a, \ldots, p, \ldots, q, \ldots \qquad (A)$$

दो ऐसे अक्षरों के विनिमय को, जो बिल्कुल अगल-बगल के स्तंभों में हों, **आसन्न विनिमय** (Adjacent interchange) कहते हैं। ऊपर (A) में जो क्रम है उसमें कोई भी दो अक्षर p और q लीजिए। मान लीजिए, इनके बीच में m अक्षर और हैं। अब, यदि हम p को दाहिनी ओर को ले जाना शुरू करें, तो m+1 आसन्न विनिमयों के पश्चात्, वह q से ठीक दूसरे नंबर पर आ जाता है। मान लीजिए, अब हम q को बाएँ हाथ की ओर ले जाना आरंभ करते है तो m आसन्न विनिमयों के पश्चात् q उस स्थान पर पहुँच जाता है कि परिणाम वही होता है जो क्रम (A) में ही p और q का स्थान परस्पर बदल देने से होता। यह अवस्था (2m+1) आसन्न विनिमयों के पश्चात् प्राप्त होती है।

अब, मान लीजिए, (2) में हम प्रत्येक चिह्न का (2m+1) बार परिवर्तन करते हैं। परिणाम वही होता है जो पहले के चिह्नों के बदले विपरीत चिह्न रख देने से होता। निष्कर्ष यह हुआ कि परिभाषा में दिया हुआ तीसरा प्रतिबंध यदि अक्षरों में आसन्न विनिमय के होने पर भी संतुष्ट होता है तो वह स्वयमेव अक्षरों के किसी भी विनिमय पर भी संतुष्ट होगा।

द्वितीय भाग—(I), (II) और (III) प्रतिबंधों के कारण द्वितीय कोटि के डिटर्मिनेंट

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

का मान $a_1b_2-a_2b_1$ आ जाता है। क्योंकि, (I) और (II) से, मान $+a_1b_2\pm a_2b_1$ होना चाहिए और III के कारण, a और b के विनिमय से चिह्न बदल जाने चाहिएँ। इसका तात्पर्य यह हुआ कि व्यंजक $a_1b_2+a_2b_1$ नहीं हो सकता।

तृतीय भाग—अब, मान लीजिए, कि (I), (II) और (III) प्रतिबंध (n−1) कोटि के किसी डिटर्मिनेंट का मान ज्ञात करने के लिए पर्याप्त। (I) से, डिटर्मिनेंट $\triangle_n$ ऐसे पदों का समुच्चय (set) है जिसमें a का अनुबंध (suffix) 1 है; पदों का यह समुच्चय है :—

$$a_1\Sigma\pm b_sc_t\ldots k_0 \qquad (3)$$

इसमें (I) को, $\triangle n$ में लागू करने पर,

(i) योग—$(n-1)$ संभावित तरीकों से, s, t, ..., θ आदि को, 2, 3, ..., n आदि मान किसी क्रम में देने पर प्राप्त होता है तथा उसमें किसी भी पद की पुनरावृत्ति नहीं होती।

और (II) को, Δ_n में लागू करने पर।

(ii) पद $b_2c_3 \ldots, k_n$ में धन चिह्न लगेगा।

और, अन्ततः (III) को, Δ_n में लागू करने पर,

(iii) b, c, . . ., k आदि अक्षरों में किन्हीं दो अक्षरों के विनिमय से (3) में सब स्थानों पर के चिह्न बदल जाते हैं।

क्योंकि हमने पहले एक परिकल्पना (hypothesis) की थी कि प्रतिबंध—(I), (II) और (III) से $(n-1)$ कोटि के डिटर्मिनेंट का मान ज्ञात हो सकता है। इसलिए, (2) के वे पद जिनमें a का अनुबंध 1 है निम्नलिखित से प्रकट किए जा सकते हैं :

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & . & . & k_2 \\ b_3 & c_3 & . & . & k_3 \\ . & . & . & . & . \\ b_n & c_n & . & . & k_n \end{vmatrix} \qquad (3a)$$

अब हमारे द्वारा यह मान लेने से कि (I), (II) और (III) प्रतिबंधों से $(n-1)$ कोटि के डिटर्मिनेंट की परिभाषा दी जा सकती है, (3a) से (2) के उन सब पदों के चिह्न ज्ञात हो सकते हैं जिनमें $a_1b_2, a_1b_3, \ldots, a_1b_n$ आदि हैं।

चतुर्थ भाग—(2) में यदि a और b का विनिमय कर दें तो, प्रतिबंध (III) के कारण, (2) में समस्त चिह्न बदल जाने चाहिएँ। अतः (2) के वे पद जिनमें b का अनुबंध 1 है, निम्नलिखित से प्रकट किए जा सकते हैं :—

$$-b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & . & k_2 \\ a_3 & c_3 & . & k_3 \\ . & . & . & . \\ a_n & c_n & . & k_n \end{vmatrix} ; \qquad (3b)$$

(3b) के अनुसार किसी पद $b_1 a_s c_t \ldots k_\theta$ का चिह्न (3a) के किसी पद $a_1 b_s c \ldots k_\theta$ के चिह्न के विपरीत होगा।

अतः b और c, c और d . . ., j और k के आसन्न विनिमय से (2) का रूप इस प्रकार का होना चाहिए :—

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & . & . & k_2 \\ b_3 & c_3 & . & . & k_3 \\ . & . & . & . & . \\ b_n & c_n & . & . & k_n \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & . & . & k_2 \\ a_3 & c_3 & . & . & k_3 \\ . & . & . & . & . \\ a_n & c_n & . & . & k_n \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & . & . & k_2 \\ a_3 & b_3 & . & . & k_3 \\ . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & . & . & k_n \end{vmatrix} -$$

$$- \ldots + (-1)^{n-1} \; k_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & . & . & j_2 \\ a_1 & b_3 & . & . & j_3 \\ . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & . & . & j_n \end{vmatrix} \qquad (4)$$

दूसरे शब्दों में, यदि प्रतिबंध —(I), (II) और (III) से (n–1) कोटि के किसी डिटर्मिनेंट की परिभाषा अद्वितीय रूप से (uniquely) दी जा सकती है तो इन्हीं प्रतिबंधों से n कोटि के डिटर्मिनेंट की परिभाषा भी संभव है। और जैसा हमने देखा कि ये प्रतिबंध अद्वितीय रूप से 2 कोटि के डिटर्मिनेंट की परिभाषा दे देते है तो, उत्तरोत्तर आगम (induction) के प्रयोग से, ये किसी भी कोटि के डिटर्मिनेंट की परिभाषा भी देंगे।

2.2. **किसी पद का चिह्न ज्ञात करने के लिए नियम**—मान लीजिए, किसी पद $a_r b_s \ldots k_\theta$ में n से कम होने पर भी n से बाद में आने वाले अनुबंधों की संख्या λ_n है, दूसरे शब्दों में, मान लीजिए कि n के सापेक्ष यहाँ λ_n उत्क्रमण (inversions) हैं। उदाहरणार्थ, एक पद $a_2b_3c_4d_1$ लीजिए। इसमें केवल एक अनुबंध ऐसा है जो 4 से कम होने पर भी 4 के बाद आता है। हमारी भाषा में इसका अर्थ यह हुआ कि 4 के सापेक्ष यहाँ केवल 1 उत्क्रमण है। अर्थात् यहाँ $\lambda_n = 1$. इसी प्रकार, यदि $n-1$ से कम होने पर भी $n-1$ से बाद में आने वाले अनुबंधों की संख्या λ_{n-1} है तो $n-1$ के सापेक्ष उत्क्रमणों की संख्या λ_{n-1} हुई; इत्यादि। मान लीजिए,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n = N$$

इस जोड़ को अनुबंधों के उत्क्रमणों की कुल संख्या (total number) कहते हैं।

जैसे, यदि $n = 6$, और पद —

$$a_4b_3c_2d_6e_1f_5, \qquad (5)$$

है तो, $\lambda_6 = 2$, क्योंकि 1 और 5 अनुबंध 6 के बाद आते है।

$\lambda_5 = 0$, क्योंकि 5 से कम कोई भी अनुबंध 5 के बाद नहीं आता।

$\lambda_4 = 3$, क्योंकि 3, 2, 1 अनुबंध 4 के बाद आते हैं।

और इसी प्रकार, $\lambda_3 = 2, \; \lambda_2 = 1, \; \lambda_1 = 0$;

अतएव उत्क्रमणों की कुल संख्या है

$$2 + 3 + 2 + 1 = 8.$$

यदि $a_rb_s \ldots k_\theta$ में n के सापेक्ष λ_n उत्क्रमण हैं तो 1, 2, .., $n-1$ अनुबंधों के क्रम में किसी परिवर्तन को लाए बिना, अक्षरों के λ_n आसन्न विनिमयों के द्वारा हम n को वर्णमाला के nवें अक्षर का अनुबंध बना सकते हैं, और वर्णमाला के क्रम को पूर्वदशा में लाकर, n को अंतिम अनुबंध बना सकते हैं। उदाहरणार्थ, (5) में, $\lambda_n = 2$ होने पर, f का e से तथा f का d से दो आसन्न विनिमय कर देने पर

क्रमश: $a_4b_3c_2d_6f_1e_5$ और $a_4b_3c_2f_6d_1e_5$ प्राप्त होते हैं। दूसरे वर्णमाला के क्रम को पूर्वदशा में लाने पर $a_4b_3c_2d_1e_5f_6$ प्राप्त होता है। इसमें 4, 3, 2, 1, 5 आदि अनुबंध उसी क्रम में आते हैं जिसमें वे (5) में है और अनुबंध 6 अंत में आता है।

इसी प्रकार, जब n को अंतिम अनुबंध बनाया जा चुका है, अक्षरों के λ^{n-1} आसन्न विनिमयों के पश्चात् तथा वर्णमाला के क्रम को पूर्वदशा में ला देने के पश्चात्, हम $(n-1)$ को भी $(n-1)$वाँ अनुबंध बना सकते हैं; इत्यादि।

इस प्रकार, अक्षरों के $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$ आसन्न विनिमयों से $a_1b_s\ldots k_\theta$, $a_1b_s\cdots k_n$ के अनुरूप हो जाता है। (III) के कारण, (2) के किसी भी पद का चिह्न $(-1)^N$ होगा, जहाँ N (अर्थात् $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$), अनुबंधों के उत्क्रमणों की कुल संख्या है।

2.3. N का मान एक दूसरे तरीके से भी प्राप्त किया जा सकता है।

मान लीजिए, $1 \leqslant m \leqslant n$.

यह भी मान लीजिए कि पद $a_rb_s\cdots k_\theta$ में m से बड़े होने पर भी **m** से पहले आने वाले अनुबंधों की संख्या μ_m है। इसका अर्थ यह हुआ कि अनुबंध **m** इन μ_m बड़े अनुबंधों में से प्रत्येक के बाद आता है। इसके परिणामस्वरूप, वह प्रत्येक के सापेक्ष एक उत्क्रमण का कारण हो जाता है जिससे हम N का मान ज्ञात कर सकते हैं। यह स्पष्ट है कि—

$$N = \sum_{m=1}^{n} \mu_m. \qquad (6)$$

3. डिटर्मिनेंट के गुणधर्म

3.1. प्रमेय 1. §2.1 में दिए हुए डिटर्मिनेंट $\triangle_n$ का निम्नलिखित रूपों में प्रसार (expansion) किया जा सकता है।

(i) $\Sigma(-1)^N a_rb_s\ldots k_\theta$,

यहाँ N=r, s, . . . ,θ आदि अनुबंधों में उत्क्रमणों की कुल संख्या।

(ii) $$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & \cdot & \cdot & k_2 \\ b_3 & c_3 & \cdot & \cdot & k_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & c_n & \cdot & \cdot & k_n \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & \cdot & \cdot & k_2 \\ a_3 & c_3 & \cdot & \cdot & k_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & c_n & \cdot & \cdot & k_n \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n-1}k_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & \cdot & \cdot & j_2 \\ a_3 & b_3 & \cdot & \cdot & j_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & \cdot & \cdot & j_n \end{vmatrix}.$$

इस प्रमेय को हम ऊपर § 2 में सिद्ध कर चुके हैं।

प्रमेय 2. एक डिटर्मिनेंट के मान में, पंक्तियों और स्तंभों के विनिमय से भी कोई परिवर्तन नहीं होता, अर्थात् —

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdot & \cdot & k_1 \\ b_1 & b_2 & \cdot & \cdot & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & \cdot & \cdot & k_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdot & \cdot & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_1 & k_2 & \cdot & \cdot & k_n \end{vmatrix}.$$

प्रमेय 1 से, द्वितीय डिटर्मिनेंट को निम्नलिखित से प्रकट कर सकते हैं —

$$\Sigma(-1)^M \alpha_1 \beta_2 .., \kappa_n, \tag{7}$$

यहाँ $\alpha, \beta, .., \kappa$ आदि वास्तव में किसी विशेष क्रम में $a, b, .., k$ आदि अक्षरों को ही प्रकट करते हैं और अक्षरों के उत्क्रमणों की कुल संख्या को M प्रकट करता है।

[यदि μ_n अक्षर k के बाद आते हैं जो वर्णमाला में k से पहले आने चाहिएँ तो μ_n उन उत्क्रमणों की संख्या है जो $\alpha\beta \ldots \kappa$ में k के सापेक्ष हैं; इत्यादि इत्यादि : अक्षरों के उत्क्रमणों की कुल संख्या $\mu_1+\mu_2+..+\mu_n$ हुई।]

अब (7) के किसी पद उदाहरणार्थ, $(-1)^M \alpha_1\beta_2..\kappa_n.$ (8)

को लीजिए। मान लीजिए, हम इस गुणनफल (product) को इस प्रकार लिखते हैं कि इसमें अक्षरों का क्रम वर्णमाला के अनुरूप हो जाए, तो इस पद का रूप कुछ इस प्रकार का होगा —

$$(-1)^M a_r b_s .. j_t k_\theta. \tag{9}$$

(8) में μ_n अक्षर ऐसे हैं जो k के बाद आते हैं। इसके परिणामस्वरूप, (9) में μ_n अनुबंध ऐसे होंगे जो θ से बड़े होने पर भी θ से पहले आएँगे। इसी प्रकार μ_{n-1} अक्षर ऐसे होंगे जो वर्णमाला में तो j से पहले आते हैं लेकिन यहाँ j से बाद में आएँगे। और, इसके परिणामस्वरूप μ_{n-1} अनुबंध ऐसे होंगे जो t से बड़े होने पर भी (9) में उससे पहले आएँगे, इत्यादि। §2 3 को ध्यान में रखते हुए, यहां हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि M, जिसको हम $\Sigma\mu_n$ से प्रकट करते हैं N के बराबर होगा। N स्वयं (9) में अनुबंधों के उत्क्रमणों की कुल संख्या को व्यक्त करता है।

अतः (7) को हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$\Sigma(-1)^N a_r b_s \ldots . k_\theta,$$

लेकिन (7) ऊपर दिए हुए दूसरे डिटर्मिनेंट का प्रसार मात्र है। प्रमेय 1 को ध्यान में रखकर, हम यह देख सकते हैं कि पहले वाले डिटर्मिनेंट का भी प्रसार यही होगा। दूसरे शब्दों में, प्रथम और द्वितीय डिटर्मिनेंट एक ही व्यंजक को प्रकट करते हैं। और इस प्रकार, प्रमेय 2 सिद्ध हो जाता है।

प्रमेय 3.—**किन्ही दो स्तंभों, अथवा किन्ही दो पंक्तियों के विनिमय से डिटर्मिनेंट के मान में वही परिवर्तन हो जाता है जो डिटर्मिनेंट को —1 से गुणा कर देने से होता है।**

Δ_n की परिभाषा में दिए हुए तीसरे प्रतिबंध से यह स्पष्ट हो जाता है कि किन्हीं भी दो स्तंभों के विनिमय से, अर्थात् किन्हीं भी दो अक्षरों के विनिमय से, डिटर्मिनेंट के मान में, डिटर्मिनेंट को −1 से गुणा कर देने के समान परिवर्तन हो जाता है।

प्रमेय 2 के कारण, किन्हीं दो पंक्तियों के विनिमय से भी डिटर्मिनेंट के मान में यही परिवर्तन हो जाएगा।

उपप्रमेय (corollary)—**यदि किसी स्तंभ (अथवा पंक्ति) को, आसन्न विनिमयों के द्वारा, समसंख्या (even number) बार (जैसे, दो, चार, आदि) अपने स्थान से हटा दिया जाए तो डिटर्मिनेंट के मान में कोई अंतर नहीं पड़ता, जैसे—**

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 & d_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 & d_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 & d_3 \\ c_4 & a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

परंतु, यदि किसी स्तंभ (अथवा पंक्ति) को विषय संख्या (odd number) बार अपने स्थान से हटाया जाए तो उसके मान में −1 से गुणा कर देने के समान परिवर्तन हो जाता है।

ऊपर के उदाहरण में a b c d को c a b d में लाने के लिए दो आसन्न विनिमय आवश्यक हैं; b और c के विनिमय से a c b d फिर a और c के विनिमय से c a b d प्राप्त हुआ, फिर भी दोनों का मान एक ही है।

3.11. प्रमेय 1 में दूसरे वाले प्रसार को 'पहली पंक्ति से प्रसार' के नाम से पुकारा जाता है। प्रमेय 3 में दिए गए उपप्रमेय के कारण, इसी प्रकार का प्रसार किसी भी अन्य पंक्ति से भी हो सकता है। उदाहरणार्थ—

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

और, दूसरे डिटर्मिनेंट का उसकी पहली पंक्ति से यदि प्रसार करें तो हम देखते हैं कि पहला डिटर्मिनेंट निम्नलिखित के बराबर हो जाता है।

$$a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

इसी प्रकार, पहले डिर्टमिनेंट को भी इस तरह से लिखा जा सकता है :—

$$-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} + d_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

प्रमेय 2 के उपयोग से यह भी हम जानते हैं कि डिर्टमिनेंट के मान में तब भी कोई परिवर्तन नहीं होता यदि हम स्तंभों को पंक्तियों से, और पंक्तियों को स्तंभों से बदल दें। इसका तात्पर्य यह हुआ कि डिर्टमिनेंट का उसके प्रत्येक स्तंभ से प्रसार किया जा सकता है।

दूसरे अध्याय (§1) में हम पुनः इसी बात की चर्चा करेंगे।

3.2. प्रमेय 4 —**यदि एक डिर्टमिनेंट के कोई दो स्तंभ, या दो पंक्तियाँ, अभिन्न (identical) हों तो डिर्टमिनेंट का मान शून्य होता है।**

क्योंकि, ऐसा होने पर उन दो स्तंभों अथवा पंक्तियों के विनिमय से उसके भाव में कोई अंतर नहीं पड़ता। लेकिन प्रमेय 3 से इस प्रकार के विनिमय से डिर्टमिनेंट के मान में -1 से गुणा कर देने के समान परिवर्तन हो जाना चाहिए। अर्थात्, यदि पहले उसका मान x था तो अब $-x$ होगा। अतएव, $x=-x$, या $2x=0$.

प्रमेय 5—**यदि किसी स्तंभ (अथवा पंक्ति) के प्रत्येक अवयव (element) को K से गुणा कर दिया जाए तो डिर्टमिनेंट के मान में भी K से गुणा हो जाता है।**

इसको हम परिभाषा से संलग्न एक उपप्रमेय कहेंगे, क्योंकि

$$\Sigma \pm Ka_r b_s \ldots k_\theta = K\,\Sigma \pm a_r b_s \ldots k_\theta$$

3.3. प्रमेय 6—**n कोटि का कोई डिर्टमिनेंट, जैसे,**

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 & \cdot & \cdot & k_1+k_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2+\beta_2 & \cdot & \cdot & k_2+k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n\alpha_n & +b_n+\beta_n & \cdot & \cdot & k_n+k_n \end{vmatrix}$$

उन 2^n डिर्टमिनेंट के योग के बराबर होता है जो प्रत्येक स्तंभ से एक-एक अक्षर चुनकर, और इस प्रकार 2^n भिन्न-भिन्न तरीकों से बनाए जा सकते हैं। उदाहरण के लिए,

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2+\beta_2 \end{vmatrix}$$

निम्नलिखित चार डिर्टमिनेंटों के योग के बराबर है —

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

यह भी परिभाषा से स्पष्ट हो जाता है; क्योंकि

$$\Sigma\pm(a_r+\alpha_r)(b_s+\beta_s)\ldots(k_\theta+k_\theta)$$

को उन 2^n संकलनों के बीजगणितीय योग से व्यक्त कर सकते हैं जो प्रत्येक कोष्ठक में से कोई भी एक-एक पद लेकर बन सकते हैं।

3.4. प्रमेय 7—**यदि किसी स्तंभ (अथवा पंक्ति) के प्रत्येक अवयव में किसी दूसरे स्तंभ (अथवा पंक्ति) के संगत अवयव (corresponding element) का कोई अचर-गुणज (constant multiple) जोड़ा अथवा घटा दिया जाए तो डिटर्मिनेंट के मान में कोई अन्तर नहीं आता।** उदाहरणार्थ,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+\lambda b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\lambda b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\lambda b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

उपपत्ति—चर्चा के लिए §2.1 में दिया हुआ डिटर्मिनेंट Δ_n लीजिए। मान लीजिए, Δ_n के दो अलग-अलग स्तंभों के अक्षर x और y हैं। यह भी मान लीजिए, कि Δ_n एक ऐसा डिटर्मिनेंट है जो Δ_n में x स्तंभ के प्रत्येक अवयव x_r के स्थान पर $x_1+\lambda y_r$ रखने से प्राप्त होता है, यहाँ λ और r दोनों परस्पर स्वतंत्र हैं।

अब, प्रमेय 1 से—

$$\Delta_n' = \Sigma(-1)^N a_r b_s\ldots(x_u+\lambda y_u)\ldots y_t\ldots k_\theta$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & . & x_1 & . & y_1 & . & k_1 \\ a_2 & b_2 & . & x_2 & . & y_2 & . & k_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & . & x_n & . & y_n & . & k_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & . & \lambda y_1 & . & y_1 & . & k_1 \\ a_2 & b_2 & . & \lambda y_2 & . & y_2 & . & k_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & . & \lambda y_n & . & y_n & . & k_n \end{vmatrix}$$

लेकिन, इनमें से दूसरा डिटर्मिनेंट शून्य है क्योंकि, प्रमेय 5 से, यह एक ऐसे डिटर्मिनेंट का λ गुना है जिसके दो स्तंभ एक दूसरे से अभिन्न हैं। अतः $\Delta_n' = \Delta_n$.

प्रमेय 7 के उपप्रमेय—प्रमेय 7 का विस्तार करके उसको कई रूपों में कहा जा सकता है उदाहरणार्थ, प्रमेय 7 के उत्तरोत्तर अनुप्रयोग (application) से निम्नलिखित भी सिद्ध किया जा सकता है :—

किसी डिटर्मिनेंट के प्रत्येक स्तंभ (अथवा पंक्ति) में परवर्ती (subsequent) अर्थात् अगले स्तंभों (अथवा पंक्तियों) के स्थिर-गुणज जोड़ देने पर भी डिटर्मिनेंट के मान में कोई अंतर नहीं पड़ता; जैसे,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+\lambda b_1+\mu c_1 & b_1+\upsilon c_1 & c_1 \\ a_2+\lambda b_2+\mu c_2 & b_2+\upsilon c_2 & c_2 \\ a_3+\lambda b_3+\mu c_3 & b_3+\upsilon c_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

परवर्ती के स्थान पर पूर्ववर्ती (preceding) कर देने पर भी उपर्युक्त कथन लागू होता है।

प्रमेय 7 का एक और विस्तार इस प्रकार है—

किसी स्तंभ (अथवा पंक्ति) के गुणजों को अन्य स्तंभों (अथवा पंक्तियों) में जोड़ देने पर भी डिटर्मिनेंट के मान में कोई अन्तर नहीं पड़ता; जैसे,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+\lambda b_1 & b_1 & c_1+\mu b_1 \\ a_2+\lambda b_2 & b_2 & c_2+\mu b_2 \\ a_3+\lambda b_3 & b_3 & c_3+\mu b_3 \end{vmatrix}.$$

अनुभव और अध्ययन से ऐसे अनेक विस्तारों का ज्ञान पाठक को हो जाएगा। इनके बारे में कोई सिद्धांत या नियम निर्धारित नहीं किए जा सकते। लेकिन इतना अवश्य ध्यान में रखना चाहिए कि बिना सोचे-समझे स्तंभों और पंक्तियों के गुणजों को एक-दूसरे में जोड़ने या घटाने से त्रुटियाँ भी होने की संभावना रहती है। इसलिए, प्रत्येक पद की, प्रमेय 6 को दृष्टि में रखते हुए, परीक्षा कर लेनी चाहिए। ऐसा न करने पर किस प्रकार के अवांछित परिणाम आ सकते है यह हम निम्न-लिखित उदाहरण से देख सकते है :—

यदि, $$\triangle = \begin{vmatrix} a_1+\lambda b_1 & b_1+\mu c_1 & c_1+\upsilon a_1 \\ a_2+\lambda b_2 & b_2+\mu c_2 & c_2+\upsilon a_2 \\ a_3+\lambda b_3 & b_3+\mu c_3 & c_3+\upsilon a_3 \end{vmatrix}$$

इसको प्रमेय 6 के कारण ऐसे लिख सकते हैं :—

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda b_1 & \mu c_1 & \upsilon a_1 \\ \lambda b_2 & \mu c_2 & \upsilon a_2 \\ \lambda b_3 & \mu c_3 & \upsilon a_3 \end{vmatrix};$$

प्रमेय 6 के कारण जो अन्य डिर्टमिनेंट बन सकते हैं वे सब ही, प्रमेय 4 और 5 के कारण, शून्य हो जाते हैं। जैसे,

$$\begin{vmatrix} \lambda b_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda b_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

फलस्वरूप, $$\triangle = (1+\lambda\mu\upsilon)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

टिप्पणी—बिना सोचे-विचारे पंक्तियों के गुणजों को एक-दूसरे में जोड़ देने या घटा देने से जो त्रुटियाँ हो जाती हैं उनके परिणामस्वरूप कभी-कभी बड़े निराले निष्कर्ष सामने आते हैं। ऊपर के दृष्टांत में ही एक हेत्वाभास (fallacy) हम देख सकते हैं जिसमें $\triangle = 0$ हो जाता है। वह कुछ इस प्रकार कहा जा सकता है।

'पहले स्तंभ में से दूसरे स्तंभ को घटाइए। दूसरे और तीसरे स्तंभों को जोड़ दीजिए, और फिर, पहले और तीसरे को जोड़ दीजिए।' इस कथन से $\lambda = -1$, $\mu = 1$, $\upsilon = 1$, का तात्पर्य होता है। अनेक संभव मानों में से इन मानों के चुनने से $\triangle = 0$ सिद्ध हो जाता है। चाहे इस प्रकार की उपपत्ति एक ग़लत और अवांछित

परिणाम को सिद्ध कर देती है। स्तंभों के साथ जरा-सी चालाकी सेडिटर्मिनेंट का मान अपरिवर्तित रहने देने के बदले एक ऐसे व्यंजक $1+\lambda\mu\upsilon$ से गुणा कर दिया गया है जिसका मान शून्य है।

3.5 प्रमेय 1—7 के विभिन्न अनुप्रयोग (applications)

प्रमेय 7 और उसके उपप्रमेयों के अनुप्रयोग के लिए सुविधा की दृष्टि से हम निम्नलिखित संकेतन का उपयोग करेंगे—

$$r'_k = lr_1 + mr_2 + \ldots + tr_n$$

इससे हमारा संकेत होगा कि यदि हमारे पास एक डिटर्मिनेंट Δ_n है तो हम उससे एक ऐसा डिटर्मिनेंट Δ'_n बनाएँगे, जिसकी kवीं पंक्ति $=\Delta_n$ की पहली पंक्ति का l गुना + दूसरी पंक्ति का m गुना +..+ nवीं पंक्ति का t गुना होगी। इसी प्रकार के संकेतन का स्तंभों में उपयोग करने पर $c'_n = \lambda c_1 + \mu c_2 + \ldots + \kappa c_n$ होगा।

प्रश्नावली एक

1. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

$$\Delta = \begin{vmatrix} 87 & 42 & 3 & -1 \\ 45 & 18 & 7 & 4 \\ 50 & 17 & 3 & -5 \\ 91 & 9 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

जो तरीका हम यहाँ अपनाएँगे उससे पाठक को इक्के-दुक्के संख्यात्मक-डिटर्मिनेंटों (numerical determinants) का हल करने का संकेत मिल जाएगा। इनको हल करने के लिए व्यवस्थित रीतियों का वर्णन उसे व्हिटेकर* और रौबिन्सन की पुस्तक——**कलकुलस ऑफ आब्जर्वेशन्स** (लन्दन, 1926) के पाँचवें अध्याय में मिल जाएगा। इससे उसे डिटर्मिनेंट की कोटि कम करने के तरीके ज्ञात हो जाएँगे यथा, 6 कोटि के डिटर्मिनेंट को 5 कोटि के डिटर्मिनेंटों में, 5 कोटि के 4 कोटि में, आदि, आदि, कैसे लाए जा सकते हैं।

यदि, $c'_1 = c_1 - 2c_2 - c_3$, $c'_3 = c_3 + 3c_4$, लें तो,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 42 & 0 & -1 \\ 2 & 18 & 19 & 4 \\ 13 & 17 & -12 & -5 \\ 67 & 9 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

*Whittaker and Robinson' The Calculus of observations (London, 1926) Chapter V.

(और प्रमेय 1 से) $= -42 \begin{vmatrix} 2 & 19 & 4 \\ 13 & -12 & -5 \\ 67 & 6 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 18 & 19 \\ 13 & 17 & -12 \\ 67 & 9 & 6 \end{vmatrix}$

तृतीय कोटि के इन डिर्टमिटनेंटों का प्रसार करने पर,

$$\Delta = -42\{2(30)-13(-24)+67(-95+48)\} +$$
$$+ \{2(102+108)-13(108-171)+67(-216-323)\},$$

इत्यादि ।

2. सिद्ध कीजिए कि—

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha).$$

यदि, $c'_2 = c_2 - c_1, \quad c'_3 = c_3 - c_2,$

तो दिया हुआ डिर्टमिनेंट $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\beta \\ \beta\gamma & \gamma(\alpha-\beta) & \alpha(\beta-\gamma) \end{vmatrix}$,

और, प्रमेय 1 और 5 से $= (\alpha-\beta)\ (\beta-\gamma) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ & \gamma \end{vmatrix}$

$$= (\alpha-\beta)\ (\beta-\gamma)\ (\gamma-\alpha)$$

[**टिप्पणी**—यह डिर्टमिनेंट, तथा इस प्रश्नावली में आए अन्य डिर्टमिनेंट, शेषफल प्रमेय (Remainder theorem) की सहायता से शीघ्र हल किए जा सकते हैं। यहाँ वे §§ 1–3 के लिए अभ्यास की दृष्टि से रखे गए हैं ।]

3. सिद्ध कीजिए—

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & (\alpha-\beta)^2 & (\alpha-\gamma)^2 & (\alpha-\delta)^2 \\ (\beta-\alpha)^2 & 0 & (\beta-\gamma)^2 & (\beta-\delta)^2 \\ (\gamma-\alpha)^2 & (\gamma-\beta)^2 & 0 & (\gamma-\delta)^2 \\ (\delta-\alpha)^2 & (\delta-\beta)^2 & (\delta-\gamma)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

डिर्टमिनेंटों के गुणन (देखिए, प्रश्नावली चार, 2) को पढने के पश्चात् हम देखेंगे कि ऊपर दिया हुआ डिर्टमिनेंट 'स्पष्टत:' शून्य है क्योंकि यह दो ऐसे डिर्टमिनेंटों का गुणनफल है जिनमें से प्रत्येक में एक स्तंभ केवल शून्यों से ही बना है। लेकिन यहाँ इसको प्रमेय 7 पर एक अभ्यास के रूप में रखा गया है।

अब, यदि,

$r'_1 = r_1 - r_2$ और फिर, प्रमेय 5 से, r'_1 में से $(\alpha-\beta)$ को अलग कर दिया जाए,
$r'_2 = r_2 - r_3$ और r'_2 में से $(\beta-\gamma)$ को अलग कर दिया जाए,
$r'_3 = r_3 - r_4$ और r'_3 में से $(\gamma-\alpha)$ को अलग कर दिया जाए,

तो, $\Delta\sqrt{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)}$

$$= \begin{vmatrix} -\alpha+\beta & \alpha-\beta & \alpha+\beta-2\gamma & \alpha+\beta-2\delta \\ \beta+\gamma-2\alpha & -\beta+\gamma & \beta-\gamma & \beta+\gamma-2\delta \\ \gamma+\delta-2\alpha & \gamma+\delta-2\beta & -\gamma+\delta & \gamma-\delta \\ (\delta-\alpha)^2 & (\delta-\beta)^2 & (\delta-\gamma)^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

इसमें, यदि $c'_1=c_1-c_2$, $c'_2=c_2-c_3$, $c'_3=c_3-c_4$ लेकर $(\beta-\alpha)$, $(\gamma-\beta)$ श्रौर $(\delta-\gamma)$ खंडों को अलग कर दिया जाए तो इसका रूप ऐसा हो जाता है :—

$$(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)(\delta-\gamma)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \alpha+\beta-2\delta \\ 2 & 2 & 2 & \beta+\gamma-2\delta \\ 2 & 2 & 2 & \gamma-\delta \\ 2\delta-\alpha-\beta & 2\delta-\beta-\gamma & \delta-\gamma & 0 \end{vmatrix}$$

इस अन्तिम डिटर्मिनेंट में यदि,

$r'_1=r_1-r_2$, $r'_2=r_2-r_3$

लिया जाए तो इसका रूप ऐसा हो जाता है :—

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha-\gamma \\ 0 & 0 & 0 & \beta-\delta \\ 2 & 2 & 2 & \gamma-\delta \\ 2\delta-\alpha-\beta & 2\delta-\beta-\gamma & \delta-\gamma & 0 \end{vmatrix},$$

इसका प्रसार यदि पहली पंक्ति से किया जाए तो यह शून्य हो जाता है क्योंकि, ऐसा करने पर, तृतीय कोटि का जो डिटर्मिनेन्ट $(\alpha-\gamma)$ को गुणा करेगा उसमें एक पंक्ति में केवल शून्य ही होंगे।

4. सिद्ध कीजिए,

$$\begin{vmatrix} 0 & (\alpha-\beta)^3 & (\alpha-\gamma)^3 \\ (\beta-\alpha)^3 & 0 & (\beta-\gamma)^3 \\ (\gamma-\alpha)^3 & (\gamma-\beta)^3 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

5. सिद्ध कीजिए,

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta).$$

(**सुझाव**—$r'_3=r_1+r_3$ लीजिए)।

6. सिद्ध कीजिए,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta+\gamma & \gamma+\delta & \delta+\alpha & \alpha+\beta \\ \delta & \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}=0.$$

7. सिद्ध कीजिए,

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha^2-\beta^2 & \alpha^2-\gamma^2 & \alpha^2-\delta^2 \\ \beta^2-\alpha^2 & 0 & \beta^2-\gamma^2 & \beta^2-\delta^2 \\ \gamma^2-\alpha^2 & \gamma^2-\beta^2 & 0 & \gamma^2-\delta^2 \\ \delta^2-\alpha^2 & \delta^2-\beta^2 & \delta^2-\gamma^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(सुझाव—प्रमेय 6 का उपयोग कीजिए)।

8. सिद्ध कीजिए,

$$\begin{vmatrix} 2\alpha & \alpha+\beta & \alpha+\gamma & \alpha+\delta \\ \beta+\alpha & 2\beta & \beta+\gamma & \beta+\delta \\ \gamma+\alpha & \gamma+\beta & 2\gamma & \gamma+\delta \\ \delta+\alpha & \delta+\beta & \delta+\gamma & 2\delta \end{vmatrix} = 0.$$

9. सिद्ध कीजिए,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta\gamma\delta & \gamma\delta\alpha & \delta\alpha\beta & \alpha\beta\gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta).$$

10. सिद्ध कीजिए,

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af-be-cd)^2.$$

(इस डिटर्मिनेंट का मान सीधे ही ज्ञात किया जा सकता है यदि हम इसको

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

मान लें। इसका प्रसार $\Sigma(-1)^N a_r b_s c_t d_u$, होगा। यहाँ N का मान § 2.2 के नियम से ज्ञात किया जाएगा। बहरहाल, Δ के प्रसार में काफी संख्या में शून्य वाले पद आ जाएँगे। शून्य से भिन्न मान वाले पद निम्नलिखित होंगे—

a^2f^2 [$a_2b_1c_4d_3$ और इसका कारण जिसका चिह्न $(-1)^2$ होगा]

b^2e^2, c^2d^2 जिनमें से प्रत्येक का चिह्न + होगा,

aebf के दो पद { एक $a_2b_4c_1d_3$ और
दूसरा $a_3b_1c_4d_2$, जिनमें से प्रत्येक का चिह्न $(-1)^3$ होगा।]

adfc के दो पद, प्रत्येक में + चिह्न, तथा cdbe के दो पद, प्रत्येक में − चिह्न होगा।

अतः $\Delta = a^2f^2+b^2e^2+c^2d^2-2aebf+2afcd-2becd$.)

11. सिद्ध कीजिए,

यदि $\triangle = \begin{vmatrix} 0 & c & b & d \\ c & 0 & a & e \\ b & a & 0 & f \\ d & e & f & 0 \end{vmatrix}$

तो $\triangle$ का प्रसार होगा —

$a^2d^2+b^2e^2+c^2f^2-2bcef-2cafd-2abde.$

12. सिद्ध कीजिए कि,

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$ का प्रसार $=\Sigma x^4-2\Sigma y^2z^2.$

13. निम्नलिखित डिटर्मिनेंट को दो खंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए—

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ b & x+c & d & a \\ c & d & x+a & b \\ d & a & b & x+c \end{vmatrix}$$

[सुझाव—दो एकघाती खंड $x+a+c\pm(b+d)$ तथा एक द्विघाती (quadratic) खण्ड से कीजिए।]

14. यदि 4 कोटि के एक डिटर्मिनेंट $\triangle$ से एक नया डिटर्मिनेंट $\triangle'$ इस प्रकार बनाया जाए कि—

$c'_1=c_1+\lambda c_2,\quad c'_2=c_2+\mu c_3,\quad c'_3=c_3+\upsilon c_1,\ c'_4=c_4.$

तो, सिद्ध कीजिए कि—

$\triangle'=(1+\lambda\mu\upsilon)\triangle.$

4. डिटर्मिनेंटों के लिए संकेतन

§2.1 में दिए गए डिटर्मिनेंट Δ_n को उसके अग्रग विकर्ण से सूचित किया जा सकता है। इसको प्रायः $(a_1b_2c_3\ldots k_n)$ रूप में लिखा जाता है।

प्राथमिक नोट में हमने द्विः अनुबंध संकेतन (double suffix notation) का उपयोग किया था। इसके द्वारा हम व्यंजक को और अधिक संक्षिप्त रूप में व्यक्त कर सकते हैं। उस डिटर्मिनेंट को, जिसकी r वीं पंक्ति तथा s वें स्तंभ का अवयव a_{rs} हो, हम $|a_{rs}|$ से प्रकट कर सकते हैं।

कभी-कभी एक डिटर्मिनेंट को उसकी पहली पंक्ति से भी सूचित करना पर्याप्त होता है। उदाहरणार्थ $(a_1b_2c_3\ldots k_n)$ को $|\,a_1b_1c_1\ldots k_1\,|$ से प्रकट किया जा सकता है, लेकिन इस संकेतन को समझने में ग़लती भी हो सकती है।

5. डिटर्मिनेंटों के मानक प्रकार (standard types of determinants)

5.1. अंतरों का गुणनफल : एकांतरक (alternants)

प्रमेय 8—डिटर्मिनेंट

$$\Delta_4 \equiv \begin{vmatrix} \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

गुणनफल $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)$ के बराबर होता है; n कोटि का संगत डिटर्मिनेंट, अर्थात् $(\alpha^{n-1}\beta^{n-2}\ldots 1)$ डिटर्मिनेंट में आए हुए $\alpha, \beta, \ldots, \kappa$ आदि अक्षरों के अन्तरों के गुणनफल के बराबर होता है। यह ध्यान देने योग्य है कि खंडों में वर्णों का क्रम उपयुक्त रहे। इस प्रकार के डिटर्मिनेंट को एकांतरक कहते है।

Δ_4 का प्रसार करने पर हम देखते हैं कि वह निम्नलिखित की तरह समझा जा सकता है—

(a) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ चरों में 6 घात के समघाती बहुपद (homogeneous polynomial) की तरह, जब गुणांक ± 1 हों;

(b) α में अधिकतम 3 घात के अ-समघाती बहुपद (non-homogeneous polynomial) की तरह, जब α के घातों के गुणांक $\beta, \gamma,$ और δ के फलन (function) हों।

जब $\alpha=\beta$ हो तो डिटर्मिनेंट शून्य हो जाता है क्योंकि तब उसमें दो स्तंभ अभिन्न हो जाते हैं। इसका तात्पर्य यह हुआ, कि α में जो बहुपद है उस पर यदि शेषफल प्रमेय को लागू किया जाए तो, डिटर्मिनेंट में एक खंड $(\alpha-\beta)$ होगा। इसी प्रकार के तर्कों से यह कहा जा सकता है कि $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ में से किन्हीं भी दो का अंतर Δ_4 का एक खंड होता है। अर्थात्

$$\Delta_4 = K(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta). \qquad (10)$$

अब, गुणक K को $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ से स्वतंत्र होना चाहिए, क्योंकि Δ_4 एक ऐसा समघाती बहुपद है जो $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ में 6 घात का है, अतः K एक संख्यात्मक अचर (numerical constant) है। ऊपर (10) के दाहिने पक्ष में $\alpha^3\beta^2\gamma$ का गुणांक K है और Δ_4 में वह 1 है। अतः $K=1$ और

$$\Delta_4 = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)$$

इस अंतिम गुणनफल को सुगमता के लिए $\zeta(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ से प्रकट करते है। n अक्षर $\alpha, \beta, \ldots \kappa$ आदि के अंतरों के इसी प्रकार के गुणनफल को $\zeta(\alpha, \beta, \ldots, \kappa)$ से प्रकट करते हैं। इस अंतिम गुणनफल में—

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+1$$

खंड होते है। डिटर्मिनेंट $(\alpha^{n-1}\beta^{n-2}\ldots 1)$ का घात भी $(n-1)+(n-2)+\ldots+1$ होता है। अतः Δ_4 में किए गए तर्क Δ_n में भी लागू किए जा सकते हैं।

5.2. चक्रक (The circulant)

प्रयेय 9—

डिटर्मिनेंट $\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . & . & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & . & . & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & . & . & a_{n-2} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_2 & a_3 & a_4 & . & . & a_1 \end{vmatrix} = \Pi(a_1+a_2\omega+\ldots+a_n\omega^{n-1}$

यहाँ गुणनफल को 1 के nवें मूलों में उत्तरोत्तर रूप से लिया गया है। ऐसे डिटर्मिनेंट को चक्रक कहते हैं।

मान लीजिए, ω निम्नलिखित n संख्याओं में कोई एक संख्या है—

$$\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \ (k=1, 2, \ldots, n)$$

Δ में यदि पहले स्तंभ c_1 के स्थान पर एक नया स्तंभ c'_1 ऐसा रखें कि

$$c'_1 = c_1 + \omega c_2 + \omega^2 c_3 + \ldots + \omega^{n-1} c_n$$

तो Δ के मान में कोई अंतर नहीं पड़ता,

यदि यह ध्यान में रखें कि $\omega^n = 1$ और यदि $a_1+a_2\omega+\ldots+a_n\omega^{n-1} \equiv \alpha$ लिखें तो नए डिटर्मिनेंट का पहला स्तंभ यों होगा—

$$a_1+a_2\omega+a_3\omega^2+\ldots+a_n\omega^{n-1} = \alpha,$$
$$a_n\omega^n+a_1\omega+a_2\omega^2+\ldots+a_{n-1}\omega^{n-1} = \omega\alpha,$$
$$a_{n-1}\omega^n+a_n\omega^{n+1}+a_1\omega^2+\ldots+a_{n-2}\omega^{n-1} = \omega^2\alpha,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_2\omega^n+a_3\omega^{n+1}+\ldots+a_n\omega^{2n-2}+a_1\omega^{n-1} = \omega^{n-1}\alpha,$$

अतः, नए डिटर्मिनेंट के पहले स्तंभ का एक खंड $\alpha \equiv a_1+a_2\omega+\ldots+a_n\omega^{n-1}$ होगा। प्रमेय 5 के कारण, यह Δ का भी एक खंड है। यह तर्क $\omega = \omega_K$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ के लिए लागू होता है जिसके परिणामस्वरूप,

$$\Delta = K \prod_{k=1}^{n} (a_1+a_2\,\omega_k+\ldots+a_n\omega_k^{\,n-1}). \qquad \textbf{(11)}$$

इसके अतिरिक्त, K इन चरों से स्वतंत्र होना चाहिए, क्योंकि Δ और π दोनों $a_1, a_2, \ldots, a_n$ चरों में n घात के समघाती हैं, और इसलिए, वह एक संख्यात्मक अचर होगा, (11) के दोनों पक्षों में a_1^n के गुणांकों की तुलना करने पर हम देखते हैं कि $K=1$ है।

6. विषम और सम क्रमचय (Odd and even permutations)

6.1. $r, s, \ldots, \theta$ आदि n संख्याओं को $1, 2, \ldots, n$ का एक क्रमचय कहते हैं यदि वे संख्याएँ $1, 2, \ldots, n$ को ही किसी क्रम में रखने से बनी हों। $r, s, \ldots, \theta$ क्रम को $1, 2, \ldots, n$ क्रम से ही युग्मों (pairs) के उपयुक्त विनिमयों से प्राप्त किया जा

सकता है ; लेकिन एक प्रकार के क्रम को किसी और क्रम में लाने के लिए जो विनिमय किए जाते हैं वे अद्वितीय नहीं होते। दूसरे शब्दों में एक क्रम, अनेक भिन्न-भिन्न विनिमयों से दूसरे क्रम में लाया जा सकता है; उदाहरणार्थ, 432615 को, 123456 में निम्नलिखित विनिमयों के द्वारा बदला जा सकता है।

$$\begin{pmatrix}4&3&2&6&1&5\\1&3&2&6&4&5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&3&2&6&4&5\\1&2&3&6&4&5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&6&4&5\\1&2&3&4&6&5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4&6&5\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix},$$

इसमें पहले हम 1 को प्रथम स्थान में रखते हैं, फिर 2 को द्वितीय स्थान में रखते हैं, और इसी प्रकार के उत्तरोत्तर विनिमयों के पश्चात् वांछित परिणाम प्राप्त कर लेते हैं। लेकिन, इसी वांछित परिणाम को ऐसे भी प्राप्त कर सकते है कि पहले 6 को छठे स्थान में रखें, फिर 5 को पाँचवें स्थान में, 4 को चौथे स्थान में, आदि, आदि; या यह भी हो सकता है कि हम केवल आसन्न विनिमयों को ही काम में लाएं और 1 को प्रथम स्थान में लाने के लिए इस प्रकार आरंभ करें :—

$$\begin{pmatrix}4&3&2&6&1&5\\4&3&2&1&6&5\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}4&3&2&1&6&5\\4&3&1&2&6&5\end{pmatrix},$$

वास्तव में, जैसा पाठक स्वयं भी देखेगा, विनिमयों के वे समुच्चय (sets of interchanges), जो 432615 को 123456 में ले आते हैं, अनेक प्रकार के होते हैं।

अब, मान लीजिए $r, s, \ldots, \theta$ को $1, 2, \ldots, n$ में किसी विशेष तरीके से लाने के लिए K विनिमय आवश्यक होते हैं। तो, डिटर्मिनेट की परिभाषा में दिए गए तीसरे प्रतिबंध (देखिए, §2.1) के कारण, $\triangle_n \equiv (a_1\ b_2 \ldots k_n)$ के प्रसार में पद $a_r b_s \ldots k_\theta$ का चिह्न $(-1)^k$ होगा। लेकिन, जैसा हम सिद्ध कर चुके हैं, प्रतिबंध I, II और III से, $\triangle_n$ की परिभाषा अद्वितीय होनी चाहिए। इसका तात्पर्य यह हुआ कि किसी भी पद में लगने वाले चिह्न का निर्धारण अद्वितीय रूप से होना चाहिए। इसका अर्थ यह हुआ कि $r, s, \ldots, \theta$ को $1, 2 \ldots n$, में विनिमयों के चाहे किसी भी समुच्चय से बदला जाए $(-1)^k$ का चिह्न वही होगा। अतः हम कह सकते हैं कि $r, s, \cdots, \theta$ को $1, 2, \ldots, n$ में लाने के लिए यदि एक तरीके से विषम (अथवा सम) संख्या में विनिमयों की आवश्यकता होती है तो किसी और तरीके में भी विषम (अथवा सम) संख्या में विनिमय आवश्यक होंगे।

तदनुसार, प्रत्येक क्रमचय उसके इस विशेष गुण के अनुसार सम अथवा विषम के नाम से प्रकट किया जा सकता है। यदि उसको $1, 2, \ldots, n$ के मानकक्रम में लाने के लिए सम संख्या में विनिमयों की आवश्यकता होती है तो उसे सम क्रमचय कहा जाएगा। इसके विपरीत, यदि मानक क्रम में लाने के लिए उसम विषम संख्या में विनिमय आवश्यक होते हैं तो उसे विषम क्रमचय कहा जाएगा।

6.2. डिर्टमिनेंट का हवाला दिए बिना भी यह सिद्ध किया जा सकता है कि $r, s, \ldots, \theta$ को $1, 2, \ldots, n$ में लाने के लिए एक विशेष तरीके से यदि विषम (अथवा सम) संख्या में विनिमय आवश्यक होते हैं तो किसी और तरीके से भी ऐसा करने के लिए विषम (अथवा सम) संख्या में ही विनिमय आवश्यक होंगे। ऐसा होने पर, यह उचित और तर्कसंगत होगा कि हम $\triangle_n \equiv (a_1\ b_2 \ldots k_n)$ की परिभाषा $\Sigma \pm a_r\ b_s \ldots k_\theta$ से दें जिसमें किसी पद के चिह्न का धन अथवा ऋण होना इस बात पर निर्भर होगा कि उसके अनुबंध (suffix) $1, 2, \ldots, n$ के समक्रमचय में हैं अथवा विषम क्रमचय में। डिर्टमिनेंटों की परिभाषा देने का यह भी एक आम तरीका है।

7. अवकलन (Differentiation)

यदि किसी डिर्टमिनेंट के अवयव किसी चर x के फलन हों, तो उसका अवकल गुणांक (differential coefficient) निम्नलिखित रीति से प्राप्त किया जा सकता है —

यदि $\triangle$, डिर्टमिनेंट $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & . & . & k_1 \\ . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & . & . & k_n \end{vmatrix}$

को प्रकट करता है और यदि इसके अवयव x के फलन हैं तो, $\dfrac{d\triangle}{dx}$ उन n डिर्टमिनेंटों का योग होगा जो $\triangle$ की एक पंक्ति (अथवा स्तंभ) के अवयवों को अवकलित करने से आते हैं। शेष $n-1$ पंक्तियों (अथवा स्तंभों) के अवयवों में कोई परिवर्तन नहीं किया जाता।

उदाहरणार्थ,

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ x^3 & x^2 & x \\ x^4 & x^3 & x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ x^3 & x^2 & x \\ x^4 & x^3 & x^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 3x^2 & 2x & 1 \\ x^4 & x^3 & x^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ x^3 & x^2 & x \\ 4x^3 & 3x^2 & 2x \end{vmatrix}$$

इस नियम को प्रमेय 1 की सहायता से सिद्ध किया जा सकता है; क्योंकि

$$\triangle = \Sigma(-1)^N\ a_r\ b_s \ldots\ k_\theta$$

किसी गुणनफल को अवकलित करने के साधारण नियमों को यदि ऊपर $\triangle$ पर लागू करें तो—

$$\frac{d\triangle}{dx} = \Sigma(-1)^N \left\{ \frac{da_r}{dx}\ b_s \ldots k_\theta + a_r \frac{db_s}{dx} \ldots k_\theta \right.$$

$$\left. + \ldots + a_r b_s \ldots j_t \frac{dk_\theta}{dx} \right\}$$

क्योंकि, उदाहरणार्थ, यह भी स्पष्ट है कि—

$$\Sigma(-1)^N \frac{da_r}{dx} bs\ldots k_\theta = \begin{vmatrix} \frac{da_1}{dx} & . & . & \frac{da_n}{dx} \\ b_1 & . & . & b_n \\ . & . & . & . \\ k_1 & . & . & k_n \end{vmatrix}$$

अतः, $\frac{d\triangle}{dx}$ उन n डिटर्मिनेंटों का योग होगा जिनमें से प्रत्येक की एक पंक्ति में Δ की एक पंक्ति के अवकल गुणांक होते हैं और शेष n—1 पंक्तियों में $\triangle$ वाली ही संगत पंक्तियाँ होती हैं ।

प्रश्नावली दो

1. सिद्ध कीजिए—

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta+\gamma & \beta^2+\gamma^2 \\ 1 & \gamma+\alpha & \gamma^2+\alpha^2 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha^2+\beta^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = -\zeta(\alpha,\beta,\gamma)$$

[**सुझाव**—$c'_2=c_2-s_1c_1$, $c'_3=c_3-s_2c_1$ लीजिए; जहाँ $s_r=\alpha^r+\beta^r+\gamma^r$.]

2. सिद्ध कीजिए—

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta\gamma \\ 1 & \beta & \gamma\alpha \\ 1 & \gamma & \alpha\beta \end{vmatrix} = -\zeta(\alpha, \beta, \gamma).$$

3. सिद्ध कीजिए—

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta+\gamma & (\beta+\gamma)^2 \\ 1 & \gamma+\alpha & (\gamma+\alpha)^2 \\ 1 & \alpha+\gamma & (\alpha+\beta)^2 \end{vmatrix} = \zeta(\alpha, \beta, \gamma).$$

4. सिद्ध कीजिए कि चतुर्थ कोटि का वह प्रत्येक डिटर्मिनेंट, जिसकी पहली पंक्तियाँ क्रमश (i) $1, \beta+\gamma+\delta, \alpha^2, \alpha^3$ और (ii) $1, \alpha, \beta^2+\gamma^2+\delta^2, \beta\gamma\delta$ हैं, $\pm\zeta(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ के बराबर होता है ।

उन अन्य डिटर्मिनेंटों को भी लिखिए जो $\pm\zeta(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ के बराबर होते हैं ।

5. **सिद्ध कीजिए—**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \Pi(a_1+a_2\omega+\ldots+a_n\omega^{n-1}),$$

यहाँ ω यथाक्रम -1 के n मूलों को प्रकट करता है ।

[**टिप्पणी**—ऊपर दिए गए चक्रक को 'विषम' चक्रक ('skew' circulant) कहते हैं । प्रमेय में दिए गए चक्रक से इसकी तुलना करके अंतर ज्ञात कीजिए]

6 सिद्ध कीजिए कि 2n कोटि का ऐसा चक्रक जिसकी प्रथम पंक्तियों है—

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \ldots \quad a_{2n}$$

n कोटि के चक्रक (जिसकी प्रथम पंक्ति a_1+a_{n+1}, a_2+a_{n+2}, . . .आदि है ।) तथा n कोटि के विषम चक्रक (जिसकी प्रथम पंक्ति a_1-a_{n+1}, a_2-a_{n+2}, . . . आदि है ।) के गुणनफल के बराबर होता है ।

7. सिद्ध कीजिए कि चतुर्थ कोटि का वह चक्रक जिसकी प्रथम पंक्ति a_1, a_2, a_3, a_4 है, $\{(a_1+a_3)^2-(a_2+a_4)^2\}\{(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2\}$ के बराबर होता है ।

8. यदि, $Q(x)\equiv(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$, तो सिद्ध कीजिए—

$$\frac{1}{Q(x)} = \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ a_1 & \cdot & \cdot & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{n-2} & \cdot & \cdot & a_n^{n-2} \\ (x-a_1)^{-1} & & \cdot & (x-a_n)^{-1} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

9. प्रश्न 8 में $x=y^{-1}$ रखकर y के घातों में प्रसार कीजिए और सिद्ध कीजिए कि ${}_nH_p$, जो a_1, $a_2,\ldots, a_n$ के p घात में समघाती गुणनफलों (homogeneous products) के योग को प्रकट करता है, निम्नलिखित के बराबर होता है—

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \\ \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ a_1^{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_n^{n-2} \\ a_1^{n+p-1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_n^{n+p-1} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \\ \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ a_1^{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

10. सिद्ध कीजिए—

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} = (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+\gamma)$$

[**सुझाव** :—पहले तीन खंड प्रमेय 8 की सहायता से प्राप्त हो सकते है। α, β, γ में डिटर्मिनेंट का घात **चार** है; अतः बचा हुआ खंड α, β, γ में एकघाती होना चाहिए और उसमें किन्हीं दो अक्षरों के विनिमय से कोई अंतर नहीं पड़ना चाहिए, क्योंकि डिटर्मिनेंट में और पहले तीन खंडों के गुणनफल में, इस प्रकार के किसी भी विनिमय से चिह्न परिवर्तन हो जाता है।

एकांतरक (alternant) $\zeta(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ में δ^2 के गुणांक को ध्यान में रखकर भी प्रश्न को सिद्ध किया जा सकता है।]

11. सिद्ध कीजिए —

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} = (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta).$$

12. दसवें और ग्यारहवें प्रश्नों के निष्कर्षों का अधिक कोटि के डिटर्मिनेंटों मे भी विस्तार कीजिए।

अध्याय 2

डिर्टमिनेंट के उपसारणिक (Minors)

1. प्रथम उपसारणिक (First minors)

1.1. n कोटि के डिर्टमिनेंट $\triangle_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & . & . & k_1 \\ a_2 & b_2 & . & . & k_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & . & . & k_n \end{vmatrix}$

में किसी अवयव a_r को लीजिए। a_r जिस पंक्ति और जिस स्तंभ में है उन दोनों को निकाल देने पर $n-1$ कोटि का जो डिर्टमिनेंट बचता है उसे a_r का उपसारणिक कहते हैं। अन्य अक्षरों के लिए भी इसी प्रकार उपसारणिक ज्ञात किए जा सकते हैं। इनको प्रथम उपसारणिक कहा जाता है।

किन्ही दो अनुबंध r और s वाली दो पंक्तियों को तथा a और b अक्षरों के दोनों स्तंभों को निकाल देने पर n–2 कोटि का जो डिर्टमिनेंट बचेगा उसे द्वितीय उपसारणिक कहते हैं। तृतीय, चतुर्थ,... आदि उपसारणिकों को भी ऐसे ही समझना चाहिए। प्रथम उपसारणिकों को हम $\alpha_r, \beta_r, \ldots$ से प्रकट करेंगे।

$\triangle_n$ का किसी भी स्तंभ अथवा पंक्ति से प्रसार किया जा सकता है, (देखिए पहला अध्याय, §3·11); उदाहरणार्थ, प्रथम स्तंभ से प्रसार करने पर,

$$\triangle_n = a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n \alpha_n, \qquad (1)$$

और, यदि द्वितीय पंक्ति से प्रसार किया जाए, तो —

$$\triangle_n = -a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 - \ldots + (-1)^n k_2\kappa_2. \qquad (2)$$

1.2. ऊपर दी हुई संकेत पद्धति में चिह्नों के विषय में अधिक ध्यान की आवश्यकता होती है। सुविधा के लिए यह उचित होगा कि अब **सहखण्डों** (Co-factors) से हम परिचय प्राप्त करलें जिनकी परिभाषा निम्नलिखित तरीके से प्रायः दी जाती है।

सहखण्ड वे संख्याएँ $A_r, B_r, \ldots, K_r$ $(r=1, 2, \ldots, n)$ होती हैं कि $\triangle_n$ का यदि उसके विभिन्न स्तंभों से प्रसार किया जाए तो —

$$\begin{aligned} \triangle_n &= a_1A_1 + a_2A_2 + \ldots + a_nA_n \\ &= b_1B_1 + b_2B_2 + \ldots + b_nB_n \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &= k_1K_1 + k_2K_2 + \ldots + k_nK_n. \end{aligned}$$

और यदि $\triangle_n$ का प्रसार उसकी विभिन्न पंक्तियों से किया जाए तो,

$$\triangle_n = a_1A_1 + b_1B_1 + \ldots + k_1K_1$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$= a_nA_n + b_nB_n + \ldots + k_nK_n$$

परिभाषा से यह स्पष्ट हो जाता है कि $\alpha_r, \beta_r, \ldots$ आदि में ही उपयक्त चिह्न लगा देने से $A_r, B_r, \ldots$ आदि प्राप्त हो सकते हैं।

1.3. किसी भी विशेष उपसारणिक के चिह्न का पता आसानी से लगाया जा सकता है। उदाहरणार्थ, यह मालूम करने के लिए कि C_2 का मान $+\gamma_2$ है या $-\gamma_2$, हम यह देखते हैं कि यदि हम $\triangle_n$ में पहली दो पंक्तियों का विनिमय कर दें तो,

$$\triangle n = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & . & . & k_2 \\ a_1 & b_1 & . & . & k_1 \\ a_3 & b_3 & . & . & k_3 \\ . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & . & . & k_n \end{vmatrix}$$
$$= -a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 - c_2\gamma_2 + \ldots,$$

जबकि सहखंडों की परिभाषा के अनुसार —

$$\triangle_n = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 + \ldots;$$

फलस्वरूप,

$$C_2 = -\gamma_2.$$

पुनश्च; मान लीजिए हमें यह ज्ञात करना है कि D_3 का मान $+\delta_3$ है या $-\delta_3$, हम देखते हैं कि $\triangle_n$ में यदि हम तीसरी पंक्ति को पहली पंक्ति बना दें (प्रमेय 3 का उप-प्रमेय देखिए) तो $\triangle_n$ के मान में कोई अंतर नहीं पड़ता। और इस प्रकार बने हुए डिटर्मिनेंट का यदि पहली पंक्ति से प्रसार करें तो,

$$\triangle_n = a_3\alpha_3 - b_3\beta_3 + c_3\gamma_3 - d_3\delta_3 + \ldots,$$

परंतु, $\triangle_n = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 + d_3D_3 + \ldots,$

अतः, $D_3 = -\delta_3$

1.4. प्रथम अध्याय (§4) में हमने द्विः अनुबंध संकेतन (double suffix notation) के बारे में बताया था। यदि हम उसका प्रयोग यहाँ करें तो §1.3 की रीति से हम देखते हैं कि $|a_{rs}|$ में a_{rs} का सहखंड A_{rs}, a_{rs} के उपसारणिक का $(-1)^{r+s-2}$ गुना होता है। अर्थात्, A_{rs} उस डिटर्मिनेंट का $(-1)^{r+s}$ गुना होता है जो r-वीं पंक्ति और s-वें स्तंभ को निकाल देने पर बचता है।

2. हमने §1 में देखा है कि $\triangle_n \equiv (a_1b_2 \ldots k_n)$ होने पर,

$$\triangle_n = a_rA_r + b_rB_r + \ldots + k_rK_r. \tag{3}$$

यदि हम $\triangle_n$ की r-वीं पंक्ति, यानी, $a_r\ b_r \ldots k_r$ के स्थान पर $a_s\ b_s \ldots k_s$ रख दें, जहाँ s और r भिन्न हैं, और s स्वयं 1, 2, ..., n आदि

संख्याओं में से ही एक है, तो डिटर्मिनेंट में a_s $b_s \ldots k_s$ की ही दो पंक्तियाँ हो जाती हैं। अर्थात्, डिटर्मिनेंट शून्य के बराबर हो जाता है। लेकिन A_r, B_r, .. K_r में $\triangle_n$ की r-वीं पंक्ति के ऐसे परिवर्तन से कोई अंतर नहीं पडता। इसलिए, नए डिटर्मिनेंट के होने पर, (3) का रूप ऐसा हो जाता है —

$$0=a_sA_r+b_sB_r+\ldots+k_sK_r. \qquad (4)$$

स्तंभों के लिए भी इसी तरीके से, इसी प्रकार का निष्कर्ष और परिणाम प्राप्त किया जा सकता है। उन निष्कर्षों को हम संक्षेप में यों कह सकते हैं।

किसी पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों का अपने-अपने सहखण्डों से गुणनफलों का योग $\triangle$ होता है।

किसी पंक्ति के अवयवों का किसी दूसरी पंक्ति के संगत सहखण्डों से गुणनफलों का योग शून्य होता है।

किसी स्तंभ के अवयवों का किसी दूसरे स्तंभ के संगत सहखण्डों से गुणनफलों का योग शून्य होता है।

उपर्युक्त तथ्यों को हम प्रमेय के रूप में भी कह सकते है।

प्रमेय 10—**डिटर्मिनेंट $\triangle\equiv(a_1b_2\ldots k_n)$ का किसी भी पंक्ति अथवा स्तंभ से प्रसार किया जा सकता है : ये प्रसार निम्नलिखित रूपों में से किसी प्रकार के हो सकते हैं :—**

$$\triangle=a_rA_r+b_rB_r+\ldots+k_rK_r, \qquad (5)$$

$$\triangle=x_1X_1+x_2X_2+\ldots+x_nX_n, \qquad (6)$$

यहाँ r (का मान) 1, 2,...,n आदि संख्याओं में से कोई एक है तथा x इसी प्रकार a, b,...,k आदि अक्षरों में से कोई एक है। इसके अतिरिक्त—

$$0=a_sA_r+b_sB_r+\ldots+k_sK_r, \qquad (7)$$

$$0=y_1X_1+y_2X_2+\ldots+y_nX_n, \qquad (8)$$

यहाँ r और s दो भिन्न संख्याएँ हैं जो 1, 2, ... n में से ली गई है तथा x और y दो भिन्न अक्षर हैं जो a, b, ..., k में से लिए गए हैं।

3. §§ 4–6 की प्रस्तावना

अब हम कुछ ऐसी समस्याओं का अध्ययन करेंगे जिनके लिए मैट्रिक्स के 'क्रम' ('rank' in a matrix) में निहित गूढ़ अर्थों का समझना आवश्यक हो जाता है। इस विषय की विस्तृत चर्चा सातवें अध्याय में की जाएगी, लेकिन इन समस्याओं के बुनियादी पहलू भी पर्याप्त महत्त्व के होते हैं और §§ 4–6 में हम इन्हीं की ओर ध्यान देंगे।

4. अ-समघाती एकघात समीकरणों का साधन—(The solution of non-homogenous linear equations)

4.1.

$a_1x+b_1y+c_1z=0$ और

$a_2x+b_2y+c_2z=0$ समीकरणों को

x, y, z में समघाती एकघात समीकरण कहते हैं।

$a_1x+b_1y=-c_1$ और

$a_2x+b_2y=-c_2$ को

x, y में अ-समघाती एकघात समीकरण कहते हैं।

4.2. यदि x, y, . . ., t के ऐसे मान होने संभव हों कि m समीकरण

$$a_rx+b_ry+\ldots+k_rt=l_r \quad (r=1, 2, \ldots, m)$$

सब के सब ही उन मानों से संतुष्ट हो जाएँ तो उपर्युक्त समीकरणों को **अविरोधी** (consistent) कहते हैं। यदि x, y, . . . t के इस प्रकार के मान संभव न हों तो समीकरणों को **विरोधी** (inconsistent) कहते हैं। उदाहरणार्थ, $x+y=2$, $x-y=0$, $3x-2y=1$ अविरोधी है क्योंकि $x=1$ और $y=1$ होने पर तीनों समीकरण संतुष्ट हो जाते है। दूसरी ओर, $x+y=2$, $x-y=0$, $3x-2y=6$ विरोधी हैं, क्योंकि x, y के ऐसे मान संभव नहीं है जिनसे तीनों समीकरण संतुष्ट हो जाएँ।

4.3. x, y, . . ., t आदि n चरों में निम्नलिखित n अ-समघाती एकघात समीकरणों पर विचार कीजिए —

$$a_rx+b_ry+\ldots+k_rt=l_r \quad (r=1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

मान लीजिए, $\triangle=(a_1b_2 \ldots k_n)$ है और A_1, B_r, . . . आदि $\triangle$ में a_r, b_r, . . . आदि के सहखण्ड हैं।

प्रमेय 10 से हम जानते है कि $\Sigma a_rA_r=\triangle$, $\Sigma b_rA_r=0\ldots$, इसलिए, (9) के प्रत्येक समीकरण को उसके संगत A_r से गुणा करके जोड़ने पर

$$\triangle x+0.y+\ldots+0.t=l_1A_1+\ldots+l_nA_n;$$

अर्थात्, $$\triangle x=(l_1b_2c_3\ldots\ldots k_n), \tag{10}$$

जो $\triangle$ में ही a के स्थान पर l लिख देने से आता है।

इसी प्रकार, (9) के प्रत्येक समीकरण को उसके संगत B_r से गुणा करके जोड़ने पर

$$\triangle y=l_1B_1+\ldots+l_nB_n=(a_1l_2c_3\ldots k_n) \tag{11}$$

इत्यादि इत्यादि।

जब $\triangle \neq 0$ हो तो (9) के समीकरणों का साधन अद्‌वितीय होता है जो (10), (11) और इन्ही के अनुरूप अन्य व्यंजकों से प्राप्त होता है।

शब्दों में इस साधन को यदि व्यक्त किया जाए तो वह इस प्रकार होगा ।—

'$\triangle.x$ उस डिटर्मिनेंट के बराबर होता है जो $\triangle$ में ही a के स्थान पर 1 रख देने से आता है;

$\triangle.y$ उस डिट मनेंट के बराबर होता है जो $\triangle$ में ही b के स्थान पर 1 रख देने से आता है ; इत्यादि इत्यादि ।'†

जब $\triangle=0$ तो (9) के अ-समघाती समीकरण विरोधी हो जाते हैं जब तक कि (10), (11) तथा इन्हीं के अनुरूप अन्य व्यंजकों में दाहिनी तरफ का प्रत्येक डिर्टमिनेंट शून्य न हो जाए ।

जब ऐसे सारे डिर्टमिनेंट शून्य हों तो (9) के समीकरण विरोधी भी हो सकते है और अविरोधी भी : इसकी चर्चा हम बाद में करेंगे ।

5. समघाती एकघात समीकरणों का साधन (The solution of homogeneous linear equations)

प्रमेय 11—एक आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध [necessary and sufficient condition] यह हैं कि x, y, . . . , t आदि n चरों को ऐसे मान, जो सभी शून्य न हों, इस प्रकार दिए जा सकें कि n समघाती समीकरण

$$a_r x+b_r y+\ldots+k_r t=0 \quad (r=1, 2, \ldots, n) \qquad (12)$$

सब एक साथ ही संतुष्ट हो जाएँ—

$(a_1 b_2 \ldots k_n)=0$ होगी।

5.1. आवश्यक क्यों है ?

मान लीजिए, (12) के समीकरण x, y, . . . , t के उन मानों से संतुष्ट होते है जो सब एक साथ ही शून्य नहीं हैं । यह भी मान लीजिए कि $\triangle\equiv(a_1\ b_2\ldots k_n)$ है और $\triangle$ में a_r, b_r, . . . आदि के सहखंड A_r, B_r, . . . आदि हैं। (12) के प्रत्येक समीकरण को उसके संगत A_r से गुणा करके जोड़ दीजिए, परिणामस्वरूप, जैसा §4.3 में हुआ है, $\triangle x=0$. इसी प्रकार, $\triangle y=0$, $\triangle z=0, \ldots, \triangle t=0$. लेकिन हमारी परिकल्पना के अनुसार, x, y, . . , t में से कम-से-कम एक शून्य नहीं है या दूसरे शब्दों में सभी शून्य नहीं हैं। इसलिए $\triangle$ ही शून्य होगा।

5.2. पर्याप्त क्यों है ?

मान लीजिए, $\triangle=0$.

---

†इस निष्कर्ष के भिन्न-भिन्न रूपों से और उनके तरीकों से पाठक परिचित हो चुके होंगे यद्यपि रूपों की यह विभिन्नता स्वयं में महत्त्वपूर्ण नहीं होती ।

5.2.1. इसके अतिरिक्त, अब सबसे पहले यह मान लीजिए कि $A_1 \neq 0$ है। फिर, (12) में से $r=1$ वाले समीकरण को छोड़कर शेष $n-1$ समीकरणों को देखिए,

$$b_r y + c_r z + \ldots + k_r t = -a_r x \ (r=2, 3, \ldots, n), \qquad (13)$$

यहाँ बाएँ तरफ के गुणांकों का डिटर्मिनेंट A_1 है। अब, $\triangle$ के स्थान पर A_1 रखकर और फिर बिल्कुल §4.3 के तरीके से—

$$A_1 y = -(a_2 c_3 \ldots k_n) x = B_1 x,$$
$$A_1 z = -(b_2 a_3 d_4 \ldots k_n) x = C_1 x; \text{ आदि-आदि।}$$

इसलिए, मानों का निम्नलिखित समुच्चय (set of values),

$$x = A_1 \xi, \quad y = B_1 \xi, \quad z = C_1 \xi, \ldots,$$

जहाँ, $\xi \neq 0$, एक ऐसा समुच्चय है जब सारे ही मान शून्य नहीं है, (क्योंकि $A_1 \xi \neq 0$,) और वह (13) के समीकरणों को संतुष्ट करता है। लेकिन,

$$a_1 A_1 + b_1 B_1 + \ldots = \triangle = 0,$$

और, इसलिए मानों का यह समुच्चय ऊपर छोड़े हुए उस समीकरण को भी संतुष्ट करता है जो $r=1$ होने से आता। इससे यह सिद्ध हो जाता है कि हमारे निष्कर्ष के सही होने के लिए $\triangle = 0$ का होना एक पर्याप्त प्रतिबंध है बशर्ते $A_1 \neq 0$ हो।

यदि $A_1 = 0$ हो और मान लीजिए, कोई और प्रथम उपसारणिक C_s शून्य नहीं है। तब a और c अक्षरों के, x और z अक्षरों के, तथा 1 और s अनुबंधों के विनिमय से (12) के समीकरणों के संकेतन (notation) कुछ-कुछ बदल जाते हैं और इस नए संकेतन में, A_1, जो पुराने संकेतन में C_s है, शून्य नहीं होता। इससे तात्पर्य निकलता है कि यदि $\triangle = 0$ है और यदि $\triangle$ का कोई प्रथम उपसारणिक शून्य नहीं है तो $x, y, \ldots, t$ के ऐसे मान संभव हैं जो सब शून्य नहीं हैं और जिनसे (12) के सब समीकरण संतुष्ट हो जाते हैं।

5.2.2. अब, मान लीजिए, $\triangle = 0$ है और $\triangle$ का प्रत्येक प्रथम उपसारणिक भी शून्य है; अथवा इस कथन की व्यापक स्थिति पर विचार कीजिए, मान लीजिए, R से अधिक पंक्तियों तथा स्तंभों वाले सारे उपसारणिक शून्य हो जाते हैं, लेकिन R पंक्तियों और स्तंभों का कम-से-कम एक उपसारणिक ऐसा है जो शून्य नहीं होता। अक्षरों और अनुबंधों के विनिमय से संकेतन को इस प्रकार बदलिए कि R पंक्तियों का शून्य न होने वाला उपसारणिक, डिटर्मिनेंट $(a_1 b_2 \cdots e_{R+1})$ में a_1 का प्रथम उपसारणिक बन जाए। यहाँ e वर्णमाला का $(R+1)$वाँ अक्षर है।

(12) के स्थान पर निम्नलिखित $R+1$ समीकरणों पर विचार कीजिए,

$$a_r x + b_r y + \cdots + e_r \lambda = 0 \ (r = 1, 2, \ldots, R+1) \qquad (12')$$

यहाँ λ समुच्चय $x, y, \ldots$ के $(R+1)$वें चर को प्रकट करता है।

अब, परिकल्पना के अनुसार, $\triangle' \equiv (a_1 b_2 \cdots e_{R+1}) = 0$ लेकिन हमारी ही परिकल्पना के अनुसार $\triangle'$ में a_1 का उपसारणिक शून्य नहीं होगा। अतः, §5.21 से, (12′) के समीकरण तब संतुष्ट होंगे, जब

$$x = A'_1,\ y = B'_1,\ \ldots,\ \lambda = E'_1 \qquad (14)$$

यहाँ A'_1, B'_1, ... आदि $\triangle'$ में a_1, b_1... आदि के उपसारणिक है। और, $A_1 \neq 0$ और भी, यदि $R+1 < r \leqslant n$, है तो,

$$a_r A'_1 + b_r B'_1 + \ldots + e_r E'_1$$

वह डिटर्मिनेंट है जो $\triangle'$ में a_1, b_1, ... के स्थान पर a_r, b_r, ... रख देने से आता है और $R+1$ कोटि का यह डिटर्मिनेंट (12) के समीकरणों के गुणांको से बनता है; अतएव हमारी परिकल्पना से, इसका मान शून्य होगा। इसलिए, (14) के मान न केवल (12′) को, बल्कि निम्नलिखित को भी, संतुष्ट करते हैं।

$$a_r x + b_r y + \cdots + e_r \lambda = 0 \quad (R+1 < r \leqslant n)$$

अतएव, (12) के n समीकरण तब संतुष्ट होंगे जब हम $x, y, \ldots, \lambda$ को (14) के मान और इनके अलावा (12) के अन्य चरों को शून्य मान दे दें। इसके साथ ही, (14) में x का मान शून्य नहीं है।

6. शून्य डिटर्मिनेंट के उपसारणिक (The minors of a zero determinant)

प्रमेय 12—यदि $\Delta = 0$,

$$A_r B_s = A_s B_r, \quad A_r C_s = A_s C_r, \quad \ldots \quad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots, n \\ s = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

यदि $\Delta = 0$ है और यदि, Δ का कोई प्रथम उपसारणिक शून्य नहीं है तो r-वीं पंक्ति (या स्तंभ) के सहखंड s-वी पंक्ति (या स्तंभ) के सहखंडों के समानुपाती (proportional) होंगे, अर्थात,

$$\frac{A_r}{A_s} = \frac{B_r}{B_s} = \ldots = \frac{K_r}{K_s}.$$

निम्नलिखित n समीकरणों को देखिए—

$$a_r x + b_r y + \cdots + k_r t = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, n). \qquad (15)$$

ये $x = A_1$, $y = B_1, \ldots,$ $t = K_1$; से संतुष्ट होते है; क्योंकि, प्रमेय 10 से,

$$a_1 A_1 + b_1 B_1 + \cdots + k_1 K_1 = \Delta = 0,$$

$$a_r A_1 + b_r B_1 + \cdots + k_r K_1 = 0 \quad (r = 2, 3, \ldots, n).$$

अब यह मान लीजिए कि s संख्या 2, 3, ...n, आदि संख्याओं में से एक है और फिर n−1 निम्नलिखित समीकरणों को देखिए,

$$b_r y + c_r z + \cdots + k_r t = -a_r x \quad (r \neq s).$$

ग्रौर §4.3 के तरीके को ग्रपनाकर हम Δ के स्थान पर डिटर्मिनेट A_s को रखकर देखते हैं कि—

$$(b_1c_2\cdots k_n)y = -(a_1c_2\cdots k_n)x,$$
$$(b_1c_2\cdots k_n)z = -(b_1a_2d_3\cdots k_n)x,$$

ग्रादि-आदि; इसमें ग्रनुबंध s कही पर भी नही होता । दूसरे शब्दों में,

$A_sy=B_sx, \quad A_sz=C_sx, \quad \ldots$ ग्रादि । ये समीकरण तब सही ग्रौर ठीक होंगे जब कभी भी $x, y, \ldots, t$ ग्रादि (15) के समीकरणों को संतुष्ट करेंगे ग्रौर इसलिए ये तब भी ठीक होंगे जब

$$x=A_1, \quad y=B_1, \quad \ldots, \quad t=K_1.$$

ग्रतएव, $A_sB_1=A_1B_s, \quad A_sC_1=A_1C_s, \quad \ldots$. (16)

उपपत्ति का यही तरीका तब भी ग्रपनाया जा सकता है जब हम

$$x=A_r, \quad y=B_r, \quad \ldots, \quad t=K_r,$$

$(r\neq 1)$ को (15) का साधन मान कर चलें । इस प्रकार प्रमेय का व्यापक रूप सिद्ध हो जाता है ।

यदि कोई भी प्रथम उपसारणिक शून्य नहीं है तो हम $A_r B_s=A_s B_r$ को $A_s B_s$ से भाग दे सकते हैं, और यही अन्य ऐसे समीकरणों के साथ भी करें तो

$$\frac{A_r}{A_s}=\frac{B_r}{B_s}=\ldots=\frac{K_r}{K_s}. \qquad (17)$$

पंक्तियों के बजाय स्तंभों पर यही क्रिया की जाए तो—

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\ldots=\frac{A_n}{B_n},$$

ग्रन्य स्तंभों के लिए भी यही क्रिया दुहराई जा सकती है ।

प्रश्नावली तीन

1. $a^rx+b^ry+c^rz+d^rt=\alpha^r \quad (r=0,1,2,3),$

समीकरणों को हल करके सिद्ध कीजिए कि

$$\sum_a \frac{(\alpha-b)\,(\alpha-c)\,(\alpha-d)}{(a-b)\,(a-c)\,(a-d)}\, a^r=\alpha^r \quad (r=0,1,2,3,).$$

α के विभिन्न घातों के गुणांकों को ध्यान में रखकर a, b, c, d में सर्वसमिकाएँ (identities) प्राप्त कीजिए ।

2. यदि
$$\triangle = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

हो ग्रौर यदि G, F, C क्रमश: $\triangle$ में g, f, c के सहखण्ड हों तो सिद्ध कीजिए कि

$$aG^2+2hFG+bF^2+2gGC+2fFC+cC^2=C\Delta.$$

[**सुझाव**—$aG+hF+gC=0$, इत्यादि का उपयोग कीजिए]

3. प्रश्न 2 में दिया गया डिटर्मिनेंट यदि शून्य के बराबर हो तो सिद्ध कीजिए कि—
$BC=F^2$, $GH=AF, \ldots$, और फलस्वरूप, जब $C\neq O$ हो तो,

$$a(ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c)=(ax+hy+g)^2+\frac{1}{C}(Cy-F)^2.$$

यह भी सिद्ध कीजिए कि यदि a,..,h वास्तविक संख्याएँ हों और C ऋण (negative) हो तो A और B भी वैसे ही होंगे।

[$A=bc-f^2, F=gh-af$, इत्यादि]

4. सिद्ध कीजिए कि वे तीन रेखाएँ जिनके कार्तीय समीकरण (Cartesian equations)

$$a_r x+b_r y+c_r=0 \quad (r=1,\ 2,\ 3)$$

हों, संगामी (concurrent) या समांतर (parallel) होंगी यदि $(a_1\ b_2\ c_3)=0$ हो।

[**सुझाव**—समीकरणों को समघाती बना लीजिए और प्रमेय 11 का उपयोग कीजिए।]

5. वे प्रतिबंध ज्ञात कीजिए कि उन चार समतलों का एक सर्वनिष्ठ परिमित बिंदु (Finite point) हो सके—जिनके कार्तीय समीकरण यों हैं—

$$a_r x+b_r y+c_r z+d_r=0 \quad (r=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

6. सिद्ध कीजिए कि उस वृत्त का समीकरण, जो दिए हुए तीन वृत्तों—

$$x^2+y^2+2g_r x+2f_r y+c_r=0 \quad (r=1,\ 2,\ 3)$$

को लांबिक रूप से (orthogonally) काटता हो—यों होगा—

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & -x & -y & 1 \\ c_1 & g_1 & f_1 & 1 \\ c_2 & g_2 & f_2 & 1 \\ c_2 & g_3 & f_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

अंतिम समीकरण को इस प्रकार लिखिए—

$$\begin{vmatrix} c_1+g_1x+f_1y & g_1+x & f_1+y \\ c_2+g_2x+f_2y & g_2+x & f_2+y \\ c_3+g_3x+f_3y & g_3+x & f_3+y \end{vmatrix}=0.$$

और सिद्ध कीजिए कि ऊपर कहा हुआ वृत्त, उस बिंदु का पथ है, जिसके ध्रुवी (polars) दिए हुए तीन वृत्तों के सापेक्ष संगामी होंगे।

7. डिटर्मिनेंट के रूप में उस प्रतिबंध को प्रकट कीजिए कि चार दिए हुए वृत्तों का एक सामान्य लांबिक वृत्त (orthogonal circle) हो सके।

8.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & x^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & x^3 \end{vmatrix}$$

को खंडों के गुणनफल के रूप में प्रकट कीजिए, और फिर, डिटर्मिनेंट में x, x^2 के उपसारणिकों और खंडों के गुणनफल में x, x^2 के गुणांकों पर विचार करके, प्रश्नावली दो के दसवें तथा ग्यारहवें प्रश्न के डिटर्मिनेंटों का मान ज्ञात कीजिए।

9. प्रश्न 8 के निष्कर्षों का अधिक कोटि के डिटर्मिनेंटों पर भी विस्तार कीजिए।

7. किसी डिटर्मिनेंट का लाप्लास-प्रसार (Laplace's expansion of a determinant)

7.1. डिटर्मिनेंट $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & . & . & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & . & . & k_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & c_n & . & . & k_n \end{vmatrix}$

को इस रूप में व्यक्त किया जा सकता है —

$$\Sigma(-1)^N \ a_r \, b_s c_t \ .. \ k_\theta \tag{18}$$

यह संकलन (sum) $\underline{|n}$ संभावित तरीकों से, $r, s, \ldots, \theta$ को $1, 2, \ldots, n$ मान किसी क्रम में देने पर, प्राप्त होता है। N अनुबंध $r, s, \ldots, \theta$ में उत्क्रमणों (inversions) की कुल संख्या है।

अब हम यह दिखाएँगे कि अपनी पंक्तियों और स्तंभों से $\triangle_n$ के प्रसार एक व्यापक क्रियाविधि की ही कुछ विशिष्ट स्थितियाँ हैं।

(18) के उन पदों से, जिनमें $a_p b_q$ है, जबकि p और नियत q हों, निम्नलिखित संकलन प्राप्त होता है —

$$a_p b_q \, (AB)_{pq} \equiv a_p b_q \Sigma \pm c_t \ldots k_\theta \tag{19}$$

यह संकलन $\underline{|n-2}$ संभावित तरीकों से, $t, \ldots, \theta$ को, p और q के अलावा, $1, 2, \ldots, n$ आदि मान, देने पर आता है। (19) में किन्हीं भी दो अक्षरों का सब स्थानों पर विनिमय कर दिया जाए तो वही पद विपरीत चिह्न के साथ, फिर आ जातेहैं, क्योंकि (18) में ऐसा ही होता है। अतः, डिटर्मिनेंट की परिभाषा से, या तो $+(AB)_{pq}$ और या $-(AB)_{pq}$, $n-2$ कोटि के उस डिटर्मिनेंट के बराबर होता है जो $\triangle_n$ में से पहले और दूसरे स्तंभ, तथा p-वीं और q-वीं पंक्तियाँ निकाल देने के बाद बचता है। इस डिटर्मिनेंट को उसके अग्रग-विकर्ण (leading diagonal) से प्रकट कीजिए। मान लीजिए, वह $(c_t d_u \ldots k_\theta)$ है जहाँ $t, u, \ldots \theta$, आदि p और q के अलावा, $1, 2, \ldots, n$ उसी क्रम में हैं।

इसके अतिरिक्त, क्योंकि (18) में पदों का एक समुच्चय $a_p\ b_q\ (AB)_{pq}$ का है और a और b के विनिमय से $(AB)_{pq}$ में कोई अंतर नहीं पड़ता, इसलिए डिटर्मिनेंट की परिभाषा से इसका तात्पर्य यह होगा कि (18) में भी पदों का एक समुच्चय $-a_q b_p\ (AB_{pq})$ का है। अतः, (18) $(a_p b_q - a_q b_p)\ (AB)_{pq}$ पदों का एक समुच्चय होगा।

लेकिन हम देख चुके हैं कि $(AB)_{pq} = \pm(c_t d_u \ldots k_\theta)$, और डिर्टमिनेंट $a_p b_q - a_q b_p$ को $(a_p b_q)$ से प्रकट किया जा सकता है और इस प्रकार (18) में के पदों के एक प्रतिनिधि समुच्चय का नमूना ऐसा होगा–

$$\pm(a_p b_q)\ (c_t d_u \ldots k_\theta).$$

इसके अतिरिक्त, 1, 2,...,n में से p, q संख्याओं के सब संभावित युग्मों को बनाने से (18) के सब पदों को गिना जा सकता है। इसलिए,

$$\triangle_n = \Sigma \pm (a_p b_q)\ (c\ d \ldots k_\theta)$$

जहाँ इस संकलन को p, q के सब संभावित युग्मों से बनाया गया है।

इस रूप में लाने के बाद चिह्न का लगाना एक मुश्किल काम नहीं रह जाता क्योंकि डिटर्मिनेंट $(a_p b_q)$ के अग्रग विकर्ण वाले पद $a_p b_q$ में धन का चिह्न लगेगा और यही चिह्न डिटर्मिनेंट $(c_t d_u \ldots k_\theta)$ के अग्रग विकर्ण के पद $c_t d_u \ldots k_\theta$ में लगेगा। अतएव (18) से तुलना करने पर हम देखते है कि—

$$\triangle_n = \Sigma(-1)^N\ (a_p b_q)\ (c_t d_u \ldots k_\theta) \qquad (20)$$

जहाँ—

(i) संकलन को p, q के सब संभावित युग्मों से बनाया गया हो,

(ii) $t, u, \ldots, \theta$ आदि, p और q को छोड़कर, 1, 2, ...n ही उस क्रम में है,

(iii) N स्वयं $p, q, t, u, \ldots, \theta$ में अनुबंधों के उत्क्रमणों की कुल संख्या है।

संकलन (20) को, $\triangle_n$ का उसके पहले दो स्तंभों द्वारा प्रसार कहा जाता है।

7.2. § 7.1 में दिए गए तर्कों को अच्छी तरह समझ जाने के बाद यह सोचना भी मुश्किल नहीं है कि उनको ऐसे प्रसारों में भी लागू किया जा सकता है जैसे—

$$\triangle_n = \Sigma(-1)^N\ (a_p b_q c_r)\ (d\lambda \ldots k_\theta), \qquad (21)$$

$$= \Sigma(-1)^N\ (a_p b_q c_r d_s)\ (e_u \ldots k_\theta), \qquad (22)$$

इत्यादि, इत्यादि। यह उचित होगा कि पाठक स्वयं इनका विस्तृत अध्ययन करें।

प्रसार (20), $\triangle_n$ का द्वितीय उपसारणिकों से एक प्रसार है। इसी प्रकार (21), तृतीय उपसारणिकों से एक प्रसार, और (22), चतुर्थ उपसारणिकों से एक प्रसार है; इत्यादि-इत्यादि।

§7.1 का भिन्न-भिन्न रूपों में, अलग-अलग तरीकों से अध्ययन प्रायः किया जाता है।

§7.1. में हमने $\triangle_n$ का उसके प्रथम दो स्तंभों से प्रसार किया था। वास्तव में इसका किन्ही भी दो, या अधिक, स्तंभों या पंक्तियों से प्रसार किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, a और c तथा b और d का विनिमय करने पर हम देखते हैं कि—

$$\triangle n = \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & a_1 & b_1 & . & . & . & k_1 \\ c_2 & d_2 & a_2 & b_2 & . & . & . & k_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ c_n & d_n & a_n & b_n & . & . & . & k_n \end{vmatrix} .$$

इसके प्रथम दो स्तंभों से लाप्लास-प्रसार को, $\triangle n$ के तृतीय और चतुर्थ स्तंभों से लाप्लास-प्रसार की तरह ही समझा जा सकता है।

7.3. किसी लाप्लास-प्रसार में चिह्न का निर्धारण

द्वितीय अध्याय, §1.4 से, लाप्लास-प्रसार के किसी पद के लिए उपयुक्त चिह्न का आसानी से पता लगाया जा सकता है। डिटर्मिनेंट $\triangle \equiv |a_{rs}|$ को लीजिए जिसकी r-वीं पंक्ति तथा s-वें स्तंभ का अवयव a_{rs} है। इसके, s_1-वें, तथा s_2-वें $(s_1 < s_2)$ स्तंभों से लाप्लास-प्रसार को देखिए जिसका रूप यों होगा—

$$\Sigma \pm \begin{vmatrix} a_{r1s1} & a_{r1s2} \\ a_{r2s1} & a_{r2s2} \end{vmatrix} \times \triangle\ (r_1, r_2;\ s_1, s_2) \qquad (23)$$

यहाँ,

(i) $\triangle\ (r_1, r_2; s_1, s_2)$ उस डिटर्मिनेंट को प्रकट करता है जो $\triangle$ में r_1-वीं और r_2-वीं पंक्तियाँ तथा s_1-वें और s_2-वें स्तंभों को निकाल देने के बाद बचता है। और

(ii) संकलन, r_1, r_2; $(r_1 < r_2)$ के सब संभावित युग्मों से प्राप्त होता है।

§1.4 से, $\triangle$ के प्रसार में वे पद जिनमें $a_{r_1}\ s_1$ है, निम्नलिखित से प्रकट हो सकते हैं—

$$(-1)^{r_1+s_1} a_{r1s1}\ \triangle(r_1;\ s_1),$$

जहाँ, $\triangle\ (r_1; s_1)$ वह डिटर्मिनेंट है जो $\triangle$ में r_1-वीं पंक्ति और s_1-वें स्तंभ को निकाल देने पर प्राप्त होता है। अब, क्योंकि, $r_1 < r_2$ और $s_1 < s_2$, अवयव a_{r2s2}, $\triangle(r_1; s_1)$ की (r_2-1)-वीं पंक्ति और (s_2-1)-वें स्तंभ में होगा। इसलिए $\triangle(r_1; s_1)$ के प्रसार में वे पद जिनमें a_{r2s2} है, निम्नलिखित से प्रकट किए जा सकते हैं—

$$(-1)^{r_2+s_2-2} a_{r2s2}\ \triangle(r_1,\ r_2;\ s_1,\ s_2)$$

क्योंकि, $\triangle(r_1, r_2; s_1, s_2)$, $\triangle(r_1; s_1)$ में से ही $a_{r_2s_2}$ वाली पंक्ति और स्तंभ को निकाल देने पर प्राप्त होता है। इस प्रकार, निम्नलिखित पद $\triangle$ के प्रसार में होगा–

$$(-1)^{r_1+r_2+s_1+s_2} a_{r_1s_1} a_{r_2s_2} \triangle(r_1, r_2; s_1, s_2),$$

और इसलिए, निम्नलिखित पद $\triangle$ के लाप्लास-प्रसार में होगा—

$$(-1)^{r_1+r_2+s_1+s_2} \begin{vmatrix} a_{r_1s_1} & a_{r_1s_2} \\ a_{r_2s_1} & a_{r_2s_2} \end{vmatrix} \times \triangle(r_1, r_2; s_1, s_2). \qquad (24)$$

अर्थात्, लाप्लास-प्रसार में किसी पद में लगने वाला चिह्न $(-1)^\sigma$ होगा, जहाँ σ पद के प्रथम खंड में आने वाले अवयवों की पंक्तियों और स्तंभों की क्रमसूचक संख्याओं का योग है।

द्वितीय उपसारणिकों से प्रसार के इस नियम को, जिसको ऊपर सिद्ध किया जा चुका है, तृतीय, चतुर्थ, आदि उपसारणिकों से लाप्लास-प्रसार के लिए भी सरलता से लागू किया जा सकता है।

7.4. (20) का आशय और महत्व पाठक ने अच्छी तरह समझ लिया है या नहीं—इस निश्चय के लिए उसे डिटर्मिनेंट के निम्नलिखित प्रसारों की जाँच कर लेनी चाहिए।

(i)
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} +$$
$$+ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

(20) से इनमें लगने वाले चिह्न वही होंगे जो इनके अग्रग विकर्णों के पदों के गुणन-फलों में लगेंगे, जैसे—

$a_1b_2c_3d_4,\ a_1b_3c_2d_4,\ a_1b_4c_2d_3, \ldots,$

(24) के उपयोग से, चिह्न दूसरे रूप में यों होंगे—

$$(-1)^{1+2+1+2},\quad (-1)^{1+3+1+2},\quad (-1)^{1+4+1+2}, \ldots$$

(ii)
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & 0 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} = -(a_1b_5)\ (c_2d_3e_4).$$

इसका चिह्न $(-1)^{1+5+1+2}$ होगा जो (24) के उपयोग से आसानी से मालूम हो सकता है।

(iii)

$$0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & b_4 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = \triangle_1 A_2^3 + \triangle_2 A_1^3 - \triangle_3 A_1^2,$$

जहाँ $\triangle_1 \equiv (a_2 b_3 c_4)$, $\triangle_2 \equiv (a_3 b_4 c_1)$, $\triangle_3 \equiv (a_4 b_1 c_2)$ और A_r^s, $\triangle_s$ में a_r का सहखंड है ।

अध्याय 3

दो डिटर्मिनेंटों का गुणनफल

1. संकलन (summation) की परिपाटी

एक रूढ़ परिपाटी काफी समय से चली आ रही है कि एक संकलन जैसे,

$$\sum_{r=1}^{n} a_r b_r \tag{1}$$

को केवल एक पद द्वारा प्रकट किया जा सकता है, जैसे

$$a_r \ b_r. \tag{2}$$

परिपाटी यह है कि जब कोई वर्णात्मक अनुबंध (literal suffix) किसी पद में बार-बार आता है, जैसे ऊपर (1) में r आ रहा है, तो वह अकेला पद, उन सब पदों के संकलन या योग को प्रकट करेगा जो r को विभिन्न मान देने से आते हैं। वह परिपाटी तभी लागू होती है जब पाठक संदर्भ में अनुबंध के विभिन्न मानों के परिसर (range) को जानता हो। आगे होने वाली चर्चा के लिए हम यह मान लेते हैं कि प्रत्येक अनुबंध के मानों का परिसर 1, 2,···, n है।

इसी तरह, परिपाटी के कुछ और उदाहरण यों हैं—

$a_{rs} x_s$, $\sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_s$ को प्रकट करता है, (3)

$a_{rj} b_{js}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{rj} b_{js}$ को प्रकट करता है, (4)

$a_{rs} x_r x_s$, $\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_r x_s$ को प्रकट करता है। (5)

अंतिम उदाहरण में r और s दोनों की ही पुनरावृत्ति होगी इसलिए संकलन इन दोनों के सापेक्ष किया जाएगा।

इस प्रकार, बारंबार आने वाले अनुबंध को प्रायः **'मूक अनुबंध'** (Dummy suffix) कहते हैं। यह एक निराली बात है कि यह नाम एक ऐसे अनुबंध का हो, जिसकी उपस्थिति और उपयोग में संकलन का तात्पर्य निकलता हो हालांकि इस अर्थ में इसका प्रयोग प्रायः सब जगह किया जाता है। लेकिन यह नामकरण एक तरह से उपर्युक्त भी कहा जा सकता है क्योंकि वास्तव में प्रतीक (symbol) का अर्थ इस बात पर

निर्भर नहीं होता कि कौन-सा अक्षर, 'मूक प्रतिबंध' में आ रहा है ; उदाहरण के लिए

$a_{rs}\ x_s$ और $a_{rj}\ x_j$

दोनों से एक ही अर्थ निकलता है। अर्थात्, ये दोनों $a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}\ x_n$ को प्रकट करते हैं।

वह अनुबंध जो बार-बार नहीं आता 'मुक्त अनुबंध' (Free Suffix) कहलाता है ; संकलन की परिपाटी में

$$a_{rs}x_s \tag{6}$$

से हमारा तात्पर्य उस अकेले व्यंजक से नहीं होता जिसमें r का मान नियत है बल्कि इसको हम उन n व्यंजकों के एक प्रतिनिधि या नमूने की तरह मान लेते हैं जो निम्नलिखित हैं।

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs}\,x_s \quad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

इस प्रकार, (6) में, r के लिए यह सोचा जा सकता है कि वह 1, 2, ..., n में से किसी भी एक मान को लेने के लिए मुक्त या स्वतंत्र है; साथ ही यहाँ यह तात्पर्य नहीं है कि इस प्रकार के व्यंजकों का और संकलन किया गया है।

अगले परिच्छेद में इस परिपाटी का उपयोग हम n एकघाती समीकरणों (linear equations) के समुच्चय के एकघाती रूपांतरणों (transformations) के लिए करेंगे।

2. $x_i\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ आदि n चरों को तथा निम्नलिखित n एकघाती समघातों† को देखिए,

$$a_{ri}\ x_i\ \ (r=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{7}$$

जब हम, x_i के बदले $b_{is}X_s\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ को रखते हैं अर्थात्, जब हम

$$x_i=b_{is}\ X_s\ \ (i=1,\ 2,\ldots,\ n) \tag{8}$$

का प्रतिस्थापन (substitution) करते हैं, तो (7) के समघात इस प्रकार बदल जाते हैं—

$$a_{ri}b_{is}X_s\ \ (r=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{9}$$

अब, निम्नलिखित n समीकरणों को देखिए—

$$c_{rs}X_s=0, \tag{10}$$

जहाँ, $$c_{rs}\equiv a_{ri}b_{is}. \tag{11}$$

---

†जो लोग संकलन की परिपाटी को नहीं समझ पाए हों उनको चाहिए कि आगे की कुछ पंक्तियाँ पूरी-पूरी लिखें और $\sum_{i=1}^{n} a_{ri}\left(\sum_{s=1}^{n} b_{is}X_s\right)$ में X_s का गुणांक ज्ञात करें।

यदि डिटर्मिनेट † $|c_{rs}| = 0$ तो (10), प्रमेय 11 से, X_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ के मानों के उस समुच्चय से संतुष्ट होता है जब सारे ही मान शून्य नहीं हैं। लेकिन, X_i जब (10) के समीकरणों को सन्तुष्ट करते हैं तो हमारे पास निम्नलिखित n समीकरण हो जाते हैं—

$$a_{ri}\,x_i = a_{ri}\,b_{is}\,X_s = c_{rs}X_s = 0, \tag{12}$$

और इसलिए,

या तो सारे ही x_i शून्य हैं,

या डिटर्मिनेंट $|a_{rs}|$ शून्य है; (प्रमेय 11 से)।

पहली दशा में, n समीकरण $b_{is}\,X_s = 0$

X_i के मानों के उस समुच्चय से संतुष्ट होते हैं जब सारे ही मान शून्य नहीं हैं; अर्थात् $|b_{rs}| = 0$.

अतः, यदि $|c_{rs}| = 0$ तो, $|a_{rs}|$ व $|b_{rs}|$ डिटर्मिनेंटों में से कम-से-कम एक शून्य है। डिटर्मिनेंट $|c_{rs}|$, अर्थात् $|a_{ri}\,b_{is}|$ a-ओं में n घात का तथा b-ओं (=b's) में n घात का है, और ऐसा संकेत होता है कि—

$$|c_{rs}| = k\,|a_{rs}| \times |b_{rs}|, \tag{13}$$

जहाँ k का मान a और b के मानों से स्वतंत्र है। उस विशेष स्थिति में जब $a_{rs} = 0$, और जब, $r \neq s$, $a_{rr} = 1$, ऐसा संकेत होता है कि—

$$|c_{rs}| = |a_{rs}| \times |b_{rs}|. \tag{14}$$

ऊपर जो कुछ कहा गया है वह (14) में निहित एक महत्वपूर्ण प्रमेय का आभास दे देता है यद्यपि इसको उपपत्ति नहीं कहा जा सकता। अगले परिच्छेद में हम इस प्रमेय की दो उपपत्तियाँ देंगे। इनमें से दूसरी शायद अधिक सरल है और यह तो निश्चित ही है कि वही अधिक युक्तिपूर्ण है।

3. डिटर्मिनेंटों के गुणन के नियम की उपपत्तियाँ

प्रमेय 13—मान लीजिए $|a_{rs}|$, $|b_{rs}|$, n कोटि के दो डिटर्मिनेंट हैं, तब उनका **गुणनफल डिटर्मिनेंट** $|c_{rs}|$ **होगा, जहाँ**

$$c_{rs} = \sum_{i=1}^{n} a_{ri}\,b_{is}.$$

3.1. **पहली उपपत्ति**—इसमें द्विः अनुबंध संकेतन (double suffix notation) का उपयोग है।

---

†पहले अध्याय के §4 से तुलना कीजिए।

इस उपपत्ति में हम केवल ग्रीक अक्षर α का, संकलन के अर्थ में,'मूक अनुबंध' की तरह उपयोग करेंगे: यदि कोई रोमन अक्षर बारबार आए तो उमसे संकलन का तात्पर्य नहीं होगा। इस प्रकार,

$a_{1\alpha}b_{\alpha 1}$ का अर्थ $a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots$ होगा।

$a_{1r}b_{r1}$ का अर्थ केवल एक पद से होगा और वह पद, यदि $r=2$ है तो $a_{12}b_{21}$ होगा। निम्नलिखित रूप में लिखे हुए, डिटर्मिनेंट $|c_{pq}|$ को देखिए

$$\begin{vmatrix} a_{1\alpha}b_{\alpha 1} & a_{1\alpha}b_{\alpha 2} & \cdot & \cdot & a_{1\alpha}b_{\alpha n} \\ a_{2\alpha}b_{\alpha 1} & a_{2\alpha}b_{\alpha 2} & \cdot & \cdot & a_{2\alpha}b_{\alpha n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n\alpha}b_{\alpha 1} & a_{n\alpha}b_{\alpha 2} & \cdot & \cdot & a_{n\alpha}b_{\alpha n} \end{vmatrix}$$

इस डिटर्मिनेंट के प्रसार में,

$$a_{1r}\,a_{2s}\,a_{3t}\cdots a_{nz} \tag{15}$$

के गुणांक को ज्ञात कीजिए। ऐसा हम इस तरह कर सकते हैं। a_{1r} के अलावा सारे a_{1x} को शून्य मान लें; a_{2s} के अलावा सारे a_{2x} को शून्य मान लें; इत्यादि इत्यादि। यह सब करते हुए हम देखते हैं कि $|c_{pq}|$ के वे पद जिनमें (15) एक खंड की तरह आता है, निम्नलिखित† से दिए जा सकते हैं—

$$\begin{vmatrix} a_{1r}b_{r1} & a_{1r}b_{r2} & \cdot & \cdot & a_{1r}b_{rn} \\ a_{2s}b_{s1} & a_{2s}b_{s2} & \cdot & \cdot & a_{2s}b_{sn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{nz}b_{z1} & a_{nz}b_{z2} & \cdot & \cdot & a_{nz}b_{zn} \end{vmatrix} = a_{1r}\,a_{2s}\cdots a_{nz}\begin{vmatrix} b_{r1} & b_{r2} & \cdot & \cdot & b_{rn} \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdot & \cdot & b_{sn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{z1} & b_{z2} & \cdot & \cdot & b_{zn} \end{vmatrix}.$$

यदि $r, s, \ldots, z$ संख्याएँ सब ही विभिन्न और असमान नहीं हैं तो, 'b' डिटर्मिनेंट शून्य हो जाता है क्योंकि तब उसमें दो पंक्तियाँ अभिन्न (identical) हो जाती हैं।

प्रथम अध्याय के §2·2 को पंक्तियों में लागू करने पर हम देखते हैं कि जब $r, s, \ldots, z$ आदि संख्याएँ, किसी क्रम में $1, 2, \cdots, n$ आदि संख्याएँ ही हैं, तो 'b' डिटर्मिनेंट $(-1)^N |b_{pq}|$ के बराबर हो जाता है, यहाँ N वास्तव में $r, s, \ldots, z$ में अनुबंधों के उत्क्रमणों की कुल संख्या है। अत: ,

$$|c_{pq}| = \Sigma\,(-1)^N\,a_{1r}a_{2s}\cdots a_{nz}\,|b_{pq}| \tag{16}$$

---

† $a_{1r}b_{r1}$ केवल एक पद को प्रकट करता है, इसका ध्यान रखिए।

जहाँ, संकलन, $\underline{n}$ संभावित तरीकों से r, s, ..., z आदि को 1, 2, ..., n आदि मान किसी क्रम में देने पर प्राप्त होता है और N , अनुबंध r, s, ..., z में उत्क्रमणों की कुल संख्या है। लेकिन (16) में $|b_{pq}|$ को गुणा करने वाला खंड वास्तव में $|a_{pq}|$ का प्रसार ही है, अतएव,

$$|c_{pq}| = |a_{pq}| \times |b_{pq}| .$$

3.2. दूसरी उपपत्ति—इसमें एकल अनुवंध संकेतन (single suffix notation) का उपयोग है। निम्नलिखित को देखिए—

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \triangle' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

$$\text{तब,}\ \triangle\triangle' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & -1 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}. \quad (17)$$

यह लाप्लास की विधि से तथा डिटर्मिनेंट का उसके अंतिम दो स्तंभों से प्रसार करके देखा जा सकता है।

डिटर्मिनेंट (17) में, पहले अध्याय के §3.5 के संकेतन का प्रयोग यों करिए,

$$r'_1 = r_1 + a_1 r_3 + b_1 r_4,$$
$$r'_2 = r_2 + a_2 r_3 + b_2 r_4,$$

तो (17) का नया रूप ऐसा हो जाता है—

$$\triangle\triangle' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 & a_1\beta_1 + b_1\beta_2 \\ 0 & 0 & a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 & a_2\beta_1 + b_2\beta_2 \\ -1 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & -1 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix},$$

और इस डिटर्मिनेंट का यदि उसके प्रथम दो स्तंभों से प्रसार किया जाए तो,

$$\triangle\triangle' = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 & a_1\beta_1 + b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 & a_2\beta_1 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}. \quad (18)$$

उपर्युक्त तर्कों को n कोटि के डिटर्मिनेंटों में इस तरीके से लागू किया जा सकता है। मान लीजिए,

$$\triangle = (a_1 b_2 \cdots k_n), \quad \triangle' = (\alpha_1 \beta_2 \cdots \kappa_n).$$

तो,

डिटर्मिनेंट

$$\begin{vmatrix} a_1 & . & k_1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_n & . & k_n & 0 & . & . & 0 \\ -1 & . & 0 & \alpha_1 & . & . & \kappa_1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & -1 & \alpha_n & . & . & \kappa_n \end{vmatrix}$$

जिसका बाएँ हाथ की तरफ का निचला चौथा हिस्सा ऐसा है कि उसके मुख्य विकर्ण (principal diagonal) का प्रत्येक अवयव -1 है और जिसमें अन्य स्थानों पर 0 है।

इसमें कोई अंतर नहीं आता यदि हम यों लिखें—

$$r'_1 = r_1 + a_1 r_{n+1} + b_1 r_{n+2} + \ldots + k_1 r_{2n},$$

$$r'_2 = r_2 + a_2 r_{n+1} + b_2 r_{n+2} + \ldots + k_2 r_{2n},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$r'_n = r_n + a_n r_{n+1} + b_n r_{n+2} + \ldots + k_n r_{2n}.$$

अतएव,

$$\triangle\triangle' = \begin{vmatrix} 0 & . & . & 0 & a_1\alpha_1 + \ldots + k_1\alpha_n & . & . & a_1\kappa_1 + \ldots + k_1\kappa_n \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & a_n\alpha_1 + \ldots + k_n\alpha_n & . & . & a_n\kappa_1 + \ldots + k_n\kappa_n \\ -1 & . & . & 0 & \alpha_1 & . & . & \kappa_1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & -1 & \alpha_n & . & . & \kappa_n \end{vmatrix}$$

इस अंतिम डिटर्मिनेंट का, उसके पहले n स्तंभों से, यदि प्रसार करें तो वह अकेला पद जो शून्य नहीं होता, यों होगा—(चिह्न के लिए द्वितीय अध्याय §7.3 देखिए।)

$$(-1)^n \begin{vmatrix} -1 & 0 & . & 0 \\ 0 & -1 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + \ldots + k_1\alpha_n & . & a_1\kappa_1 + \ldots + k_1\kappa_n \\ a_2\alpha_1 + \ldots + k_2\alpha_n & . & a_2\kappa_1 + \ldots + k_2\kappa_n \\ . & . & . \\ a_n\alpha_1 + \ldots + k_n\alpha_n & . & a_n\kappa_4 + \ldots + k_n\kappa_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2n} \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + \ldots + k_1\alpha_n & . & . & a_1{}^k{}_1 + \ldots + k_1\kappa_n \\ . & . & . & . \\ a_n\alpha_1 + \ldots + k_n\alpha_n & . & . & a_n\kappa_1 + \ldots + k_n\kappa_n \end{vmatrix}.$$

इसके अतिरिक्त, क्योंकि, 2 n एक समसंख्या (even number) है, इसलिए डिटर्मिनेंट में लगने वाला चिह्न सदैव ही धन होगा । अतएव—

$$\begin{vmatrix} a_1 & . & k_1 \\ . & . & . \\ a_n & . & k_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & . & \kappa_1 \\ . & . & . \\ \alpha_n & . & \kappa_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + \ldots + k_1\alpha_n & . & a_1\kappa_1 + \ldots + k_1\kappa_n \\ . & . & . \\ a_n\alpha_1 + \ldots + k_n\alpha_n & . & a_n\kappa_1 + \ldots + k \end{vmatrix} \quad (19)$$

प्रमेय 13 को व्यक्त करने का यह भी एक तरीका है ।

4. डिटर्मिनेंटों के गुणन की अन्य विधियाँ

प्रमेय 13 में दिए गए नियम को प्राय: **मैट्रिक्स-नियम**† (matrix rule) या **पंक्तियों का स्तंभों से गुणन का नियम** (the rule for multiplication of rows by columns) कहते हैं । (19) में दाहिने हाथ की तरफ के डिटर्मिनेंट की पहली पंक्ति बनाने के लिए, हम $\triangle$ की पहली पंक्ति के प्रत्येक अवयव को, $\triangle'$ के उत्तरोत्तर स्तंभों के अवयवों से गुणा करते हैं; दूसरी पंक्ति बनाने के लिए इसी प्रकार $\triangle$ की दूसरी पंक्ति के प्रत्येक अवयव को, $\triangle'$ के उत्तरोत्तर स्तंभों के अवयवों से गुणा करते हैं । (18) की सहायता से यह तरीका आसानी से समझा जा सकता है ।

एक डिटर्मिनेंट के मान में पंक्तियों और स्तंभों के विनिमय से कोई अंतर नहीं पड़ता । इसलिए, (18) से यह अनुमान लगाया जा सकता है कि यदि

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \triangle' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

तो, (18) को इन रूपों में भी लिखा जा सकता है—

$$\triangle\triangle' = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}, \quad (20)$$

$$\triangle\triangle' = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 & b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}. \quad (21)$$

(20) में, $\triangle$ की पंक्तियों के अवयवों को $\triangle'$ की पंक्तियों के अवयवों से गुणा किया गया है; (21) में, $\triangle$ के स्तंभों के अवयवों को, $\triangle'$ के स्तंभों के अवयवों से गुणा किया

† छठा अध्याय देखिए ।

गया है। इनमें से पहले का हवाला **'पंक्तियों से गुणन'** (multiplication by rows), **और दूसरे का 'स्तंभों से गुणन'** (multiplication by columns) कह कर दिया जाता है।

n कोटि के डिटर्मिनेंटों में ऊपर की हुई चर्चा का विस्तार सहज है : पुस्तक में आगे उपर्युक्त प्रक्रम के कई उदाहरण प्रस्तुत किए गए हैं। इस समय जो उदाहरण दिए जा रहे हैं उनमें गुणन पंक्तियों के द्वारा है : हालाँकि, यह अपनी-अपनी रुचि की बात है अतः कई लेखक 'स्तंभों द्वारा गुणन' को और कुछ 'मैट्रिक्स-नियम' को पसंद करते हैं। लेकिन, जहाँ तक संभव हो एक ही रीति का अनुसरण करने पर विचारों में सुगमता रहती है।

प्रश्नावली चार

डिटर्मिनेंटों के गुणन के नियमों को अलग-अलग उदाहरणों में लागू करने से कभी-कभी रोचक परिणाम निकाले जा सकते हैं। हम इन उदाहरणों के छोटे-छोटे वर्ग बना देंगे और प्रत्येक वर्ग में कम से कम एक उदाहरण के साधन की रीति भी देंगे।

1. $$\begin{vmatrix} 0 & (\alpha-\beta)^2 & (\alpha-\gamma)^2 \\ (\beta-\alpha)^2 & 0 & (\beta-\gamma)^2 \\ (\gamma-\alpha)^2 & (\gamma-\beta)^2 & 0 \end{vmatrix} = 2\{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)\}^2$$

यह डिटर्मिनेंट निम्नलिखित दो डिटर्मिनेंटों के पंक्तियों से गुणनफल के बराबर है—

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & -2\alpha & 1 \\ \beta^2 & -2\beta & 1 \\ \gamma^2 & -2\gamma & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

प्रमेय 8 से, इनमें से पहला $2(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$ के, तथा दूसरा $(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$ के बराबर है।

[प्रमेय 8 को लागू करने के लिए हम पहले अंतरों का गुणनफल लिख लेते हैं और फिर विकर्ण के पद को ध्यान में रखते हुए संख्यात्मक अचर (numerical constant) को साधन के अनुकूल बना लेते है।]

2. प्रथम अध्याय में प्रश्न 3 का डिटर्मिनेंट निम्नलिखित दो डिटर्मिनेंटों का पंक्तियों से गुणनफल है—

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & -2\alpha & 1 & 0 \\ \beta^2 & -2\beta & 1 & 0 \\ \gamma^2 & -2\gamma & 1 & 0 \\ \delta^2 & -2\delta & 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & 0 \\ 1 & \beta & \beta^2 & 0 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 & 0 \\ 1 & \delta & \delta^2 & 0 \end{vmatrix}$$

और, अतएव, शून्य है।



3. सिद्ध कीजिए कि n कोटि का वह डिटर्मिनेंट, जिसमें r वीं पंक्ति और s वें स्तंभ का अवयव $(a_r - a_s)^2$ है, शून्य हो जाता है जब $n > 3$ हो।

4. n कोटि के उस डिटर्मिनेंट का मान ज्ञात कीजिए, जिसमें r वीं पंक्ति और s वें स्तंभ का अवयव $(a_r - a_s)^3$ है, जब (i) $n = 4$, (ii) $n > 4$.

5. प्रश्न 3 और 4 के परिणामों का, $a_r - a_s$ के अधिक घात के होने पर भी, विस्तार कीजिए।

6. सिद्ध कीजिए,

$$\begin{vmatrix} (a-x)^3 & (a-y)^3 & (a-z)^3 & a^3 \\ (b-x)^3 & (b-y)^3 & (b-z)^3 & b^3 \\ (c-x)^3 & (c-y)^3 & (c-z)^3 & c^3 \\ x^3 & y^3 & z^3 & o \end{vmatrix}$$

$$= -9abc = xyz(b-c)(c-a)(a-b)(y-z)(z-x)(x-y).$$

7. सिद्ध कीजिए कि—

$$\begin{vmatrix} (a-x)^2 & (a-y)^2 & (a-z)^2 & a^2 \\ (b-x)^2 & (b-y)^2 & (b-z)^2 & b^2 \\ (c-x)^2 & (c-y)^2 & (c-z)^2 & c^2 \\ x^k & y^k & z^k & z \end{vmatrix}$$

तब शून्य हो जाता है जब, $k = 1, 2$ हो और इसका मान ज्ञात कीजिए जब $k = 0$ और जब $k \geqslant 3$ हो।

8. सिद्ध कीजिए, यदि $s_r = \alpha^r + \beta^r + \gamma^r + \delta^r$; तो

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & \beta & \gamma & \delta \\ {}^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 \end{vmatrix}^2$$

अतः, प्रमेय 8 की सहायता से, सिद्ध कीजिए कि इनमें से पहला डिटर्मिनेंट, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ के अंतरों के वर्गों के गुणनफल अर्थात्, $\{\xi(\alpha, \beta, \gamma, \delta)^2\}$ के बराबर है।

9. सिद्ध कीजिए कि $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$ निम्नलिखित डिटर्मिनेंट का एक खंड है। उसका दूसरा खंड भी ज्ञात कीजिए।

$$\triangle \equiv \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{vmatrix}.$$

हल—$\triangle$ में s_r अवयवों के विन्यास से ऐसा आभास होता है कि यह दो डिटर्मिनेंटों का पंक्तियों से गुणनफल है; जैसा ऊपर प्रश्न 8 में हुआ है; जहाँ,

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 & 0 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 & 0 \\ ? & ? & ? & ? & ? \end{vmatrix}, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ? \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & ? \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 & ? \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 & ? \\ \alpha^4 & \beta^4 & \gamma^4 & \delta^4 & ? \end{vmatrix}.$$

$\triangle_1$ की अंतिम पंक्ति के पहले चार अवयव, यदि शून्य से भिन्न हों तो गुणनफल $\triangle_1$ $\triangle_2$ की अंतिम पंक्ति में अवांछित पद आ जाएँगे, इसलिए, यदि हम 0, 0, 0, 0, 1 को $\triangle_1$ की अंतिम पंक्ति मानकर चलें तो यह समझना सहज है कि $\triangle_1 \triangle_2 = \triangle$ होने के लिए, $\triangle_2$ के अंतिम स्तंभ में $1, x, x^2, x^3, x^4$ होने चाहिएँ।

$\triangle$ के खंड, प्रमेय 8 की सहायता से ज्ञात हो सकते हैं।

10. सिद्ध कीजिए कि जब, $s_r = \alpha^r + \beta^r + \gamma^r$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_3 & s_4 & s_5 \end{vmatrix}.$$

यह देखने योग्य है कि पहले डिटर्मिनेंट के स्तंभों में घातांकों (indices) की तरतीब से, अंतिम डिटर्मिनेंट के स्तंभों के अनुबंधों की तरतीब में फर्क पड़ जाता है।

11. निम्नलिखित डिटर्मिनेंटों के खंड ज्ञात कीजिए, जब $s_r = \alpha^r + \beta^r + \gamma^r$ हो,

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 & s_4 \\ s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_2 & s_4 \\ s_2 & s_4 & s_6 \\ s_4 & s_6 & s_8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_7 \\ 1 & x & x^2 & x^4 \end{vmatrix},$$

12. प्रश्न 8–11 के निष्कर्षों का, अधिक कोटि के डिटर्मिनेंटों में भी विस्तार कीजिए।

13. चतुर्थ कोटि के दो डिटर्मिनेंटों का गुणन कीजिए, जिनकी पंक्तियाँ निम्नलिखित हैं—

$x_r^2 + y_r^2 \quad -2x_r \quad -2y_r \quad 1; \quad 1 \quad x_r \quad y_r \quad x_r^2 + y_r^2$ और $r = 1, 2, 3, 4$ है, और फिर, सिद्ध कीजिए, कि डिटर्मिनेंट a_{rs}, जहाँ $a_{rs} = (x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2$ शून्य हो जाता है, जब भी चार बिंदु (x_r, y_r) एक वृत्तीय (concyclic) हों।

14. एक गोल (sphere) में पाँच बिंदुओं की परस्पर दूरियों में संबंध स्थापित कीजिए।

15. $\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -(c-id) & a-ib \end{vmatrix}$ 'की तरह के'

दो डिटर्मिनेंटों के गुणनफल पर विचार कर, सिद्ध कीजिए कि चार वर्गों (square) के योग को, यदि चार वर्गों के दूसरे योग से गुणा किया जाए तो गुणनफल भी चार वर्गों का योग होता है।

16. $a^3+b^3+c^3-3abc$ को तीन कोटि के चक्रक (देखिए पहला अध्याय, § 5.2) के रूप में प्रकट कीजिए और सिद्ध कीजिए कि $(a^3+b^3+c^3-3abc)$ $(A^3+B^3+C^3-3ABC)$ को $X^3+Y^3+Z^3-3XYZ$ के रूप में भी लिखा जा सकता है।

यह भी सिद्ध कीजिए कि यदि $A=a^2-bc$, $B=b^2-ca$, $C=c^2-ab$, तो
$$A^3+B^3+C^3-3ABC=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$$

17. यदि $X=ax+hy$, $Y=hx+by$; (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) के मानों के दो समुच्चय हैं; $S_{11}=x_1 X_1+y_1 Y_1$, $S_{12}=x_1X_2+y_1Y_2$, आदि हैं; तो सिद्ध कीजिए कि $S_{12}=S_{21}$ और,

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2$$

18A. संकलन की परिपाटी के अनुसार, मान लीजिए $S=a_{rs}x^r x^s$, n चरों में कोई दिया हुआ द्विवाती समघात (quadratic form) है, जहाँ $x^1, x^2, ..x^n$ आदि n स्वतंत्र चर (independent variables) है न कि x के घात। यह भी मान लीजिए कि, $X_r.\lambda=a_{rs}x^s_\lambda$; $S\lambda\mu=x^r_\mu X_r.\lambda$, जहाँ $(x^1_\lambda, x^2_\lambda, ...x^n_\lambda)$, $\lambda=1, . . , n$, चर $x^1, x^2, . ., x^n$ के मानों के n समुच्चयों को प्रकट करता है। सिद्ध कीजिए—

$$|S_{\lambda\mu}| = |a_{rs}| \times |x^s_\lambda|^2$$

18B.—प्रश्न 17 के परिणाम का, तीन चर (x, y, z,) और आकाश (space) में तीन बिंदुओं के निर्देशांकों (co-ordinates) (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) पर विस्तार कीजिए।

5. सरणियों का गुणन (Multiplication of arrays)

5.1. दो ऐसी सरणियाँ लीजिए जिनमें स्तंभों की संख्या, पंक्तियों की संख्या से अधिक हो, जैसे,

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{matrix} \qquad (A)$$

इनको पंक्तियों से वैसे ही गुणा कर दीजिए जैसे डिटर्मिनेंटों में किया जाता है। फलस्वरूप निम्नलिखित डिटर्मिनेंट प्राप्त होता है।

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2 \\ a_2\alpha_2+b_2\beta_1+c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

यदि हम Δ का प्रसार करें और उन पदों को अलग कर लें जिनमें, मान लीजिए, $\beta_1\gamma_2$ शामिल हैं, तो हम देखेंगे कि वे $\beta_1\gamma_2\ (b_1c_1-b_2c_2)$ है। इसी प्रकार, $\beta_2\gamma_1$ के पद $-(b_1c_2-b_2c_1)$ हैं। अतः हम यह कह सकते हैं कि Δ में एक पद

$$(b_1\ c_2)\times(\beta_1\ \gamma_2)$$

है जहाँ (b_1c_2) का तात्पर्य उस डिटर्मिनेंट से है जो (A) की प्रथम सरणी के अंतिम दो स्तंभों से बनता है। इसी प्रकार $(\beta_1\gamma_2)$ का तात्पर्य द्‌वितीय सरणी से प्राप्त संगत डिटर्मिनेंट से है।

इससे यह स्पष्ट हो जाता है कि यदि Δ का प्रसार किया जाए तो उसमें निम्नलिखित पद होंगे—

$$(b_1c_2)(\beta_1\gamma_2)+(c_1a_2)(\gamma_1\alpha_2)+(a_1b_2)(\alpha_1\beta_2); \qquad (2)$$

इसके अतिरिक्त, (2) में वो सारे पद आ जाते है जो Δ के प्रसार में संभवतः हो सकते हैं। अतएव Δ, (2) के सब पदों के योग के बराबर हैं।

दूसरे शब्दों में वह, (A) की **सरणियों से बन सकने वाले, द्‌वितीय कोटि के संगत डिटर्मिनेंटों के सब गुणनफलों के योग के बराबर होता है।**

अब, $a, b, .., k, .., t$ पर गौर कीजिए और यह मानकर चलिए कि k इनमें n-वाँ और t, N-वाँ अक्षर है, और $n<N$ है; एक ऐसा ही संकेतन ग्रीक अक्षरों में भी ले लीजिए जो सका संगत हो।

दो सरणियाँ लीजिए—

$$\begin{vmatrix} a_1 \ldots k_1 \ldots t_1 & \alpha_1 \ .. \ \kappa_1 \ .. \ \tau_1 \\ .. \quad .. & .. \quad .. \\ a_n \ .. \ k_n \ .. \ t_n & \alpha_n \ .. \ \kappa_n \ .. \ \tau_n \end{vmatrix}$$

इनको पंक्तियों से गुणा करने पर, n कोटि का जो डिटर्मिनेंट बनता है वह यों है—

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_2\alpha_1+..+t_1\ \tau_1 & .. & a_1\alpha_n+..+t_1\tau_n \\ .. \quad .. \quad .. & .. & . \quad .. \\ a_n\alpha_1+..+t_n\ \tau_1 & .. & a_n\alpha_n+..+t_n\tau_n \end{vmatrix}$$

इस डिटर्मिनेंट का यदि प्रसार किया जाए तो उसमें एक पद यों होगा—nवें अक्षर k के बाद सभी अक्षरों को शून्य के बराबर कर दीजिए,

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + \ldots + k_1\kappa_1 & \ldots & a_1\alpha_n + \ldots + k_1\kappa_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n\alpha_1 + \ldots + k_n\kappa_1 & \ldots & a_n\alpha_n + \ldots + k_n\kappa_n \end{vmatrix}, \quad (4)$$

जो दो डिटर्मिनेंट $(a_1 b_2 \ldots k_n)$ और $(\alpha_1 \beta_2 \ldots \kappa_n)$ का गुणनफल होगा। इसके अतिरिक्त, (4) में, Δ के प्रसार के वे सभी पद आ जाते हैं जिनमें $a, b, \ldots, k$ अक्षरों के अलावा और कोई रोमन अक्षर नहीं है।

अतएव, Δ का संपूर्ण प्रसार, ऐसे गुणनफलों का योग होता है, इन गुणनफलों की संख्या $^N C_n$ होती है, जो दिए हुए N अक्षरों में से, n विभिन्न अक्षर चुन सकने के विभिन्न तरीकों की संख्या है। हम यह कह सकते हैं कि हमने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध कर दिया है।

प्रमेय 14—**n कोटि का डिटर्मिनेंट Δ, जो दो ऐसी सरणियों को पंक्तियों से गुणा करने पर प्राप्त होता है, जिनमें N स्तंभ और n पंक्तियाँ हैं, जहाँ $n < N$, इन्हीं दोनों सरणियों से बन सकने वाले, n कोटि के संगत डिटर्मिनेंटों के समस्त गुणनफलों के योग के बराबर होता है।**

5.2 प्रमेय 15—**n कोटि का वह डिटर्मिनेंट, जो उन दो सरणियों को पंक्तियों से गुणा करने पर प्राप्त होता है जिनमें N स्तंभ और n पंक्तियाँ हैं, जहाँ $n > N$, शून्य के बराबर होता है।**

वास्तव में, इस प्रकार प्राप्त डिटर्मिनेंट, n कोटि के उन दो शून्य डिटर्मिनेंटों (zero determinants) के पंक्तियों से गुणनफल के बराबर होता है, जो प्रत्येक सरणी में सिफ़रों (ciphers) के $(n-N)$ स्तंभ जोड़ देने के बाद आते हैं। उदाहरणार्थ—

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 & a_1\alpha_3+b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2 & a_3\alpha_3+b_3\beta_3 \end{vmatrix}$$

निम्नलिखित दो सरणियों को पंक्तियों से गुणा कर देने पर प्राप्त होता है—

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{matrix}$$

और निम्नलिखित दो शून्य डिटर्मिनेंटों को पंक्तियों से गुणा कर देने पर भी वही डिटर्मिनेंट आता है—

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

प्रश्नावली पाँच

1. निम्नलिखित दोनों सरणियों में प्रत्येक की 5 पंक्तियाँ और 4 स्तंभ हैं

$$\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\
x_1^2+y_1^2 & -2x_1 & -2y_1 & 1 \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\
x_4^2+y_4^2 & -2x_4 & -2y_4 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & \\
1 & x_1 & y_1 & x_1^2+y_1^2 \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\
1 & x_4 & y_4 & x_4^2+y_4^2
\end{array}$$

प्रमेय 15 के अनुसार, इनको पंक्तियों से गुणा करने से जो डिटर्मिनेंट प्राप्त होता है वह शून्य होता है। सिद्ध कीजिए कि इससे उस संबंध का पता लग जाता है जो समतल में किन्हीं चार बिंदुओं की परस्पर दूरियों में होता है।

2. आकाश (space) में किन्हीं पाँच बिंदुओं के लिए भी इसी प्रकार का संगत संबंध ज्ञात कीजिए।

3. यदि $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, आदि, n घात (degree) के किसी समीकरण के मूल (roots) हैं, और यदि s_r उन मूलों के r-वें घातों के योग को प्रकट करता है तो सिद्ध कीजिए कि—

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = \Sigma(\alpha-\beta)^2,$$

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = \Sigma(\beta-\gamma)^2\ (\gamma-\alpha)^2\ (\alpha-\beta)^2.$$

(सुझाव—प्रश्नावली चार के प्रश्न 8 तथा प्रमेय 14 से तुलना कर देखिए।)

4. निम्नलिखित सरणियों का (पंक्तियों से) वर्ग कर देने से जो डिटर्मिनेंट प्राप्त होता है, उसका दो अलग-अलग तरीकों से मान ज्ञात करके, सर्वसमिकाएँ (identities) प्राप्त कीजिए;

(i) $\begin{array}{ccc} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}$ (ii) $\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array}$

5. शांकवों (conics) में प्रायः उपयोग में लाए जाने वाले संकेतन में मान लीजिए

$$S \equiv ax^2 + \ldots + 2fyz + \ldots,$$

$$X \equiv ax+hy+gz, \quad Y \equiv hx+by+fz, \quad Z \equiv gx+fy+cz.$$

$$S_{rs} = x_rX_s + y_rY_s + z_rZ_s\ ;$$

यह भी मान लीजिए कि A, B,..,H क्रमशः, S के विवेचक (discriminants) में a, b,..,h के सहखण्ड (cofactors) हैं। मान लीजिए, $\xi = y_1 z_2 - y_2 z_1$, $= z_1 x_2 - z_2 x_1$, $\zeta = x_1 y_2 - x_2 y_1$, तो,

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} = A\xi^2 + B\eta^2 + c\zeta^2 + 2FMS + 2G\zeta\xi + 2H\xi\eta.$$

(हल :— डिटर्मिनेंट यों है—

$$\begin{vmatrix} x_1X_1 + .. + z_1Z_1 & x_1X_2 + .. + z_1Z_2 \\ x_2X_1 + .. + z_2Z_1 & x_2X_2 + .. + z_2Z_2 \end{vmatrix},$$

और यह इन दो सरणियों का गुणनफल है—

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{matrix}$$

और, इसलिए, $\Sigma\ (y_1 z_2)(Y_1 Z_2)$ है।

लेकिन, $(Y_1 Z_2)$ को यदि पूरा-पूरा लिखा जाए, तो यों होगा,

$$\begin{vmatrix} hx_1 + by_1 + fz_1 & gx_1 + fy_1 + cz_1 \\ hx_2 + by_2 + fz_2 & gx_2 + fy_2 + cz_2 \end{vmatrix},$$

जो कि निम्नलिखित दो सरणियों का गुणनफल है—

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} h & b & f \\ g & f & c \end{matrix}$$

और इसलिए, $A\xi + H\eta + G\zeta$ है।

अतएव प्रारंभ वाला डिटर्मिनेंट, $\xi(A\xi + H\eta + G\zeta)$ की तरह के तीन पदों का योग है।

6. **भिन्न कोटि के डिटर्मिनेंटों का गुणन:** n कोटि और m कोटि के डिटर्मिनेंटों के गुणनफल का जानना प्रायः उपयोगी होता है। इसकी रीति† को, $(a_1\ b_2\ c_3)$ का $(\alpha_1\beta_2)$ से गुणनफल करके समझा जा सकता है।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 & c_1 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 & c_2 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 & a_2\alpha_2 + b_3\beta_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

पहले और अंतिम डिटर्मिनेंटों का उनके अंतिम स्तंभों से प्रसार करके हम देख सकते हैं कि ऊपर दिया हुआ परिणाम ठीक और सही है। ऊपर के समीकरण में बायाँ पक्ष यों है—

$$\{\Sigma \pm c_r(a_s b_t)\} \times (\alpha_1\beta_2),$$

---

†मुझे इस रीति का पता प्रोफ़ेसर ए० एल० डिक्शन से लगा।

और दायाँ पक्ष, जोकि एक ही कोटि के दो डिर्टमिनेंटों के गुणन वाले नियम से प्राप्त हो सकता है, यों है—

$$\Sigma \pm c_r(a_s b_t) \times (\alpha_1 \beta_2),$$

दोनों संकलनों में चिह्नों का विन्यास भी एक ही होगा।

एक दूसरा उदाहरण इस प्रकार दिया जा सकता है—

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 & c_1 & d_1 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 & c_2 & d_2 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2 & c_3 & d_3 \\ a_4\alpha_1+b_4\beta_1 & a_4\alpha_2+b_4\beta_2 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

यह परिणाम स्पष्ट हो जाता है, यदि हम अंतिम डिर्टमिनेंट के उसके तीसरे और चौथे स्तंभों से लाप्लास-प्रसार पर विचार करें।

यह संभव है कि आपको नीचे दिया हुआ तरीका अधिक पसंद आए। यह अधिकरोचक न होते हुए भी शायद सरल है।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 & c_1 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 & c_2 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

अध्याय 4

जैकोबी का प्रमेय और उसके विस्तार

(Jacobi's theorem and its extensions)

1. जैकोबी का प्रमेय

प्रमेय 16—मान लीजिए डिटर्मिनेंट $\triangle=(a_1b_2..k_n)$ में A_r, B_r,..आदि a_r, b_r,..आदि के सहखण्ड हैं, तो, $\triangle'=(A_1B_2..K_n)=\triangle^{n-1}$

यदि हम निम्नलिखित दो डिटर्मिनेंटों का पंक्तियों से गुणन करें—

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & .. & k_1 \\ a_2 & b_2 & .. & k_2 \\ . & . & .. & . \\ a_n & b_n & .. & k_n \end{vmatrix}, \quad \Delta'=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & .. & K_1 \\ A_2 & B_2 & .. & K_2 \\ . & . & .. & . \\ A_n & B_n & .. & K_n \end{vmatrix},$$

तो, $$\Delta\Delta'=\begin{vmatrix} \Delta & 0 & .. & 0 \\ 0 & \Delta & .. & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & .. & \Delta \end{vmatrix};$$

क्योंकि $a_r A_s+b_r B_s+..+k_rK_s$, तब शून्य हो जाता है जब $r \neq s$ और तब Δ के बराबर होता है जब $r=s$.

अतएव, $\Delta\Delta'=\Delta^n$,

और, इसलिए, जब $\Delta\neq0$, $\Delta'=\Delta^{n-1}$.

लेकिन जब $\triangle$ शून्य होता है तो Δ' शून्य हो जाता है। क्योंकि, प्रमेय 12 से, जब $\Delta=0$, तो, $A_r B_s-A_s B_r=0$ जिसके फलस्वरूप, Δ' का उसके प्रथम दो स्तंभों से लाप्लास-प्रसार कुछ शून्यों का योग ही होगा।

अतः, जब $\triangle=0$, $\triangle'=0=\triangle^{n-1}$.

परिभाषा—$\triangle'$ को, $\triangle$ का सहखंडज (ADJUGATE) डिटर्मिनेंट कहते हैं।

प्रमेय 17—प्रमेय 16 के संकेतन में, $\triangle'$ में A_1 का सहखंड, $a_1\triangle^{n-2}$ के बराबर होता है। अन्य अक्षरों और अनुबंधों के लिए भी ऐसा ही कहा जा सकता है।

डिटर्मिनेंट

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ A_2 & B_2 & .. & K_2 \\ . & . & .. & . \\ A_n & B_n & .. & K_n \end{vmatrix} \text{ और } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & .. & k_1 \\ a_2 & b_2 & .. & k_2 \\ . & . & & . \\ a_n & b_n & .. & k_n \end{vmatrix}$$

को यदि पंक्तियों से गुणा किया जाए, तो,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & .. & a_n \\ 0 & \triangle & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & \triangle \end{vmatrix}$$

प्राप्त होता है जिसमें अग्रग विकर्ण (leading diagonal) के बाईं ओर के तथा नीचे के सारे ही पद शून्य हैं। इस प्रकार,

$$\triangle\begin{vmatrix} B_2 & .. & K_2 \\ .. & .. & .. \\ B_n & .. & K_n \end{vmatrix}=a_1\triangle.^{n-1}$$

जब $\triangle \neq 0$, तो इससे प्रमेय में दिया हुआ परिणाम प्राप्त हो जाता है।
जब $\triangle = 0$, तो परिणाम, उन्हीं तर्कों को लागू करने से स्पष्ट हो जाता है जो हमने प्रमेय 16 में $\triangle'$ पर विचार करते समय रखे थे; प्रत्येक $B_rC_s - B_sC_r$ शून्य है।

इसके अतिरिक्त, यदि हम $\triangle'$ में J_r के उपसारणिक (minor) पर गौर करना चाहें, जहाँ कि J वर्णमाला का s--वाँ अक्षर है तो हम निम्नलिखित डिटर्मिनेंटों का पंक्तियों से गुणन करते हैं—

$$\begin{vmatrix} A_1 & .. & J_1 & .. & K_1 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ A_{r-1} & .. & J_{r-1} & .. & K_{r-1} \\ 0 & .. & 1 & .. & 0 \\ A_{r+1} & .. & J_{r+1} & .. & K_{r+1} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ A_n & .. & J_n & .. & K_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & .. & j_1 & .. & k_1 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_r & .. & j_r & .. & k_r \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_n & .. & j & .. & k_n \end{vmatrix}$$

जिससे

$$\begin{vmatrix} \triangle & .. & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ j_1 & .. & j_s & .. & j_n \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & 0 & .. & \triangle \end{vmatrix} \quad (1)$$

प्राप्त होता है जिसमें सारे j, r—वीं पंक्ति में आते हैं और अग्रग विकर्ण में आने वाले $\triangle$ ही वे पद हैं जो शून्य नहीं हैं। (1) का मान $j_r \triangle^{n-r}$ है।

2. जैकोबी के प्रमेय का सामान्य रूप (General form of Jacobi's theorem)

2.1. पूरक उपसारणिक (complementary minors)—n कोटि के किसी डिटर्मिनेंट $\triangle$ में, किन्हीं दी हुई r पंक्तियों और r स्तंभों के अवयवों से, जहाँ $r<n$ है, डिटर्मिनेंट का एक उपसारणिक बनता है।
जब इन पंक्तियों और स्तंभों को $\triangle$ में से निकाल दिया जाता है तो जो अवयव (elements)

बच रहते हैं उनसे n—r कोटि का एक दूसरा डिटर्मिनेंट बनता है। इसी को उपयुक्त चिह्न के सहित पहले वाले उपसारणिक का पूरक उपसारणिक कहते हैं।

इसमें चिह्न का निर्धारण इस नियम से किया जाएगा कि एक लाप्लास-प्रसार (Laplace expansion) सदैव $\Sigma + \mu_r \gamma_{n-r}$, के रूप का होगा जहाँ γ_{n-r} उपसारणिक μ_r का पूरक है। इस प्रकार

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

में $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ का पूरक उपसारणिक $+ \begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_4 & d_4 \end{vmatrix}$ है। (2)

क्योंकि, (1) के पहले और तीसरे स्तंभों द्वारा लाप्लास-प्रसार में $+(a_1c_3)(b_2d_4)$ पद है।

प्रमेय 18—**प्रमेय 16 के संकेतन में, मान लीजिए कि $\mathfrak{M}_r$, $\triangle'$ का एक उपसारणिक है, जिसकी r पंक्तियाँ और स्तंभ हैं और γ_{n-r}, $\triangle$ के संगत उपसारणिक का पूरक उपसारणिक है। तो**

$$\mathfrak{M}_r = \gamma_{n-r} \triangle^{r-1} \qquad (3)$$

विशेष रूप से, ऊपर दिया हुआ डिटर्मिनेंट (1), यदि $\triangle$ है, तो सहखण्डों के लिए प्रचलित संकेतन में

$$\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_4 & d_4 \end{vmatrix} \triangle.$$

आइए पहले इस प्रमेय की सरल-सरल विशेष-स्थितियों (particular cases) से निपट लें। यदि r=1, तो (3) एक प्रथम उपसारणिक (first minor) की परिभाषा मात्र है; उदाहरणार्थ, परिभाषा से (1) में दिया हुआ A_1, डिटर्मिनेंट $(b_2\ c_3\ d_4)$ है। यदि, r>1 और $\triangle=0$ तो भी $\mathfrak{M}_r=0$ जैसा कि हम प्रमेय 12 से देखते हैं। अतएव (3) सही और ठीक होगा, जब भी r=1 और जब भी $\triangle=0$.

अब यह सिद्ध करना बाकी रह जाता है कि (3) तब भी सही और ठीक होगा जब और ठीक होगा जब r>1 और $\triangle \neq 0$.

इसलिए मान लीजिए, r>1, यह भी $\triangle \neq 0$; यह भी मान लीजिए कि μ_r, $\triangle$ का वह उपसारणिक है जिसके अवयव, पंक्तियों और स्तंभों में, $\triangle'$ के उन अवयवों के संगत हों जिनसे $\mathfrak{M}_r$ बनता है। तो, पूरक उपसारणिक की परिभाषा से, उपयुक्त चिह्न के साथ

$\triangle$ के एक लाप्लास-प्रसार में $+\mu_r\gamma_{n-r}$ पद होना चाहिए, अतः, $\triangle$ को इस रूप में लिख सकते हैं—

$$\begin{vmatrix} \mu_r & \text{अन्य अवयव} \\ \text{अन्य अवयव} & \gamma_{n-r} \end{vmatrix}$$

इस प्रकार प्रमेय को तब सिद्ध कर देना ही पर्याप्त होगा जब $\mathfrak{M}$, $\triangle'$ की प्रथम r पंक्तियों और प्रथम r स्तंभों से बनता है। यही इस समय हम करेंगे।

मान लीजिए, वर्णमाला के पहले r अक्षर A,..,E और बाद के n—r अक्षर F,..,K हैं।

निम्नलिखित गुणनफल को देखिए—

$$\begin{vmatrix} A_1 & .. & E_1 & F_1 & .. & K_1 \\ .. & .. & .. & & .. & .. \\ A_r & .. & E_r & F_r & .. & K_r \\ 0 & .. & 0 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & & .. & .. \\ 0 & .. & 0 & 0 & .. & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & .. & e_1 & f_1 & .. & k_1 \\ .. & .. & . & . & .. & .. \\ .. & .. & . & . & .. & .. \\ .. & .. & . & . & .. & .. \\ .. & .. & . & . & .. & .. \\ a_n & .. & e_n & f_n & .. & k_n \end{vmatrix}$$

इसमें पहले डिटर्मिनेंट के अग्रग विकर्ण के अंतिम n-r अवयव 1 हैं, और अंतिम n-r पंक्तियों के शेष सारे अवयव 0 हैं। उपर्युक्त गुणनफल से हमें निम्नलिखित डिटर्मिनेंट प्राप्त होता है।

$$\begin{vmatrix} \triangle & .. & 0 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & . & . & .. & .. \\ 0 & .. & \triangle & 0 & .. & 0 \\ f_1 & .. & f_r & f_{r+1} & .. & f_n \\ .. & .. & . & . & .. & .. \\ k_1 & .. & k_r & k_{r+1} & .. & k_n \end{vmatrix}$$

दूसरे शब्दों में,

$$\mathfrak{M}_r \times \triangle = \triangle^r \gamma_{n-r},$$

और इसलिए, (3) तब भी होगा जब

$r > 1$ और $\triangle \neq 0$.

अध्याय 5

समभित और विषम-सममित डिर्टमिनेंट

(Symmetrical And Skew-Symmetrical Determinants)

1. डिर्टमिनेंट $|a_{rs}|$ को सममित कहा जाता है यदि प्रत्येक r और s के लिए $a_{rs}=a_{sr}$.

डिर्टमिनेंट a_{rs} को विषम-सममित कहते हैं यदि प्रत्येक r और s के लिए $a_{rs}=-a_{sr}$ हो । इस परिभाषा का एक सीधा परिणाम यह होता है कि ऐसे डिर्टमिनेंट के अग्रग विकर्ण में सारे अवयव शून्य होते हैं, क्योंकि $a_{rr}=-a_{rr}$.

2. प्रमेय 19. **विषम कोटि के किसी विषम-सममित डिर्टमिनेंट का मान शून्य होता है ।**

डिर्टमिनेंट के मान में कोई अंतर नहीं पड़ता यदि पंक्तियों और स्तंभों का विनिमय (interchange) कर दिया जाए । एक विषम-सममित डिर्टमिनेंट में इस प्रकार के विनिमय का अर्थ यह है कि पहले वाले डिर्टमिनेंट की प्रत्येक पंक्ति को -1 से गुणा कर दिया जाए, अर्थात् सम्पूर्ण डिर्टमिनेंट को $(-1)^n$ से गुणा कर दिया जाए। इसलिए n कोटि के विषम-सममित डिर्टमिनेंट के मान में कोई अंतर नहीं पड़ता यदि उसको $(-1)^n$ से गुणा कर दिया जाए; और यदि n विषम (odd) है तो यह मान शून्य होगा ।

3. इससे पहले कि हम सम कोटि (even order) के डिर्टमिनेंटों की चर्चा करें, हम विषम कोटि के विषम-सममित डिर्टमिनेंट के प्रथम उपसारणिकों पर ध्यान देंगे ।

विषम कोटि का एक विषम-सममित डिर्टमिनेंट $|a_{rs}|$ लीजिए । मान लीजिए कि इसकी r-वीं पंक्ति और s-वें स्तंभ के अवयव a_{rs} का सहखंड (cofactor) A_{rs} है तो A_{rs} वास्तव में $(-1)^{n-1} A_{sr}$ है, अर्थात् $A_{sr}=A_r$, क्योंकि A_{rs} और A_{sr} में केवल यही अंतर है कि $\triangle$ में पंक्ति के बदले स्तंभ और स्तंभ के बदले पंक्ति की जाए, और जैसा हमने §2 में देखा है, $\triangle$ का कोई स्तंभ, उसी की संगत पंक्ति का (-1) गुना होता है; इसके अतिरिक्त, A_{rs} बनाने में हम $\triangle$ की $n-1$ पंक्तियों के अवयवों को ही लेते हैं ।

4. अभी हमें एक और प्रारम्भिक परिणाम का अध्ययन करना है : वह ऐसा है कि उसका प्रायः अन्यत्र उपयोग हो जाता है ।

प्रमेय 20. डिर्टमिनेंट
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & X_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & X_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & X_n \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n & S \end{vmatrix} \qquad (1)$$

$$= | a_{rs} | S - \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} A_{rs} X_r Y_s, \qquad (2)$$

जहाँ A_{rs} वास्तव में, $| a_{rs} |$ में a_{rs} का सहखंड है।

प्रसार का वह पद जिसमें कोई भी X और कोई भी Y नहीं है $|a_{rs}| S$ है। जिस पद में $X_r Y_s$ है वह S को, X_r के अलावा समस्त X को, और Y_s के अलावा समस्त Y को शून्य रखने से प्राप्त होता है। ऐसा करने पर हम देखते है कि $X_r Y_s$ का गुणांक $\pm A_{rs}$ है लेकिन, (1)का, उसकीr-वीं और (n+1)वीं पंक्तियों से लाप्लास-प्रसार करने पर हम यह भी देखते हैं कि $X_r Y_s$ और $a_{rs} S$ गूणांकों के चिह्न विपरीत हैं। इसलिए, $X_r Y_s$ का गुणांक $-A_{rs}$ है। इसके अतिरिक्त, प्रमेय 1(i) की तरह जब Δ का प्रसार किया जाता है तो प्रत्येक पद में या तो S होना चाहिए या एक गुणनफल $X_{rs} Y_s$. अतः, (2) में Δ के प्रसार के सारे पद आ जाते हैं।

5. प्रमेय 21. 2n कोटि का कोई विषम-सममित डिर्टमिनेंट, अपने अवयवों के किसी बहुपद फलन का वर्ग होता है।

प्रमेय 20 में, मान लीजिए कि $| a_{rs} |$, 2n—1 कोटि का एक विषम-सममित डिर्टमिनेंट है ; इसलिए प्रमेय 19से उसका मान शून्य है। अब, मान लीजिए कि $Y_r = -X_r$, $S=0$ जिसके फलस्वरूप, प्रमेय 20में दिया हुआ डिर्टमिनेंट (1), 2n कोटि का एक विषम-सममित डिर्टमिनेंट हो जाता है। उसका मान निम्नलिखित है—

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} A_{rs} X_r X_s! \qquad (3)$$

चूँकि, $| a_{rs} | = 0$, $A_{rs} A_{sr} = A_{rr} A_{ss}$ (प्रमेय 12),

याने $A_{rs}^2 = A_{rr} A_{ss}$, और $A_{r1}/A_{11} = A_{rs}/A_{1s}$

या $A_{rs} = A_{1r} A_{1s}/A_{11}$. अतएव (3) यों है—

$$(X_1\sqrt{A_{11}} \pm X_2\sqrt{A_{22}} \pm \dots \pm X_n\sqrt{A_{nn}})^2, \qquad (4)$$

यहाँ X_r से पहले आने वाला चिह्न $(-1)\rho$ है, और इस प्रकार चुना गया है कि—

$$A_{1r} = (-1)^p \sqrt{(A_{11} A_{rr})}.$$

अब $A_{11}, \dots, A_{nn}$ स्वयं भी 2n—2, कोटि के विषम-सममित डिर्टमिनेंट हैं, और यदि हम यह मान लें कि प्रत्येक अपने अवयवों के, n—1 घात के, एक बहुपद फलन का वर्ग है तो (4), n घात के एक बहुपद फलन का वर्ग हो जाएगा। अतः हमारा प्रमेय

2n—2 कोटि के किसी डिर्टमिनेंट के लिए यदि सत्य है तो वह 2n कोटि के डिर्टमिनेंट के लिए भी सत्य होगा । परंतु,

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{11} \\ -a_{11} & 0 \end{vmatrix} = a^2_{11},$$

ग्रौर, ग्रतएव, एक पूर्ण वर्ग (perfect square) है । ग्रतः हमारा प्रमेय सत्य है, जब $n=1$.

ग्रागम (induction) से यह स्पष्ट है कि यह प्रमेय, n के सारे पूर्णांक मानों (integer values) के लिए सत्य है ।

6. प्फ़ाफ़ियन (The Pfaffian)

वह बहुपद प्फ़ाफ़ियन कहलाता है जिसका वर्ग, सम कोटि के एक विषम-सममित डिर्टमिनेंट के बराबर होता है, इसके गुणधर्मों ग्रौर डिर्टमिनेंटों से इसके संबंधों का विस्तृत ग्रध्ययन हुग्रा है ।

पाठक द्वारा इनके वांछित ग्रध्ययन के लिए यहाँ हम केवल संदर्भों का ही उल्लेख करेंगे । प्फ़ाफ़ियनों की चर्चा रोचक होते हुए भी इस पुस्तक में नहीं की जा सकती, क्योंकि उनका केवल विशष प्रयोजन ग्रौर ग्रभिप्राय से ही ग्रध्ययन ग्रावश्यक होता है ।

जी० सैल्मन, **लैसंस इंट्रोडक्टरी टू दी मॉडर्न हायर अलजब्रा** (डबलिन, 1885), पाँचवाँ ग्रध्याय ।

एम० बर्नार्ड एंड जे० एम० चाइल्ड, **हायर अलजब्रा** (लंदन, 1936), §22, नवाँ अध्याय ।

सर टी० मुअर, **कंट्रीब्यूशंस टू दी हिस्ट्री ऑफ डिर्टमिनेंट्स्** I-IV खंड, (लंदन, 1890-1930) । इस इतिहास में डिर्टमिनेंटों के सिद्धांतों के प्रत्येक विषय की चर्चा है । यह बड़े ग्रच्छे ढंग से लिखा गया है ग्रौर एक संदर्भ के रूप में इसका हवाला गंभीर ग्रनुशीलन के लिए दिया जा सकता है । इसमें चर्चा पर्याप्त विस्तृत है और नौसिखिए के लिए कुछ कष्टसाध्य भी है ।

प्रशनावली छः (विधी)

1. सिद्ध कीजिए,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & X_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & X_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} & X_n \\ X_1 & X_2 & . & . & . & X_n & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\{A_{11}X_1^2 + \ .. + \ (A_{rs}+A_{rs}) \ X_rX_s + \ldots\},$$

जहाँ, A_{rs}, $|\,{}^{a}{}_{rs}|$ में ${}^{b}{}_{sr}$ का सहखंड है ।

यदि $a_{rs}=a_{rs}$ और $|a_{rs}|=0$ तो सिद्ध कीजिए कि उपर्लिखित द्विघाती समघात (quadratic form) को इस प्रकार भी लिख सकते हैं।

$$(A_{11}X_1+\ldots+A_{1n}X_n)^2/A_{11}.$$

2. यदि $S=\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{rs}x_r x_s,\quad 2X_u=\frac{\partial s}{\partial x_u},\ a_{rs}=a_{sr}.$

और $k<n$, तो सिद्ध कीजिए, कि निम्नलिखित $x_1, x_2, \ldots, x_k$ से स्वतंत्र है।

$$J=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1k} & X_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2k} & X_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{k1} & a_{k2} & . & . & . & a_{kk} & X_k \\ X_1 & X_2 & . & . & . & X_k & S \end{vmatrix}$$

सुझाव :—प्रश्न 1 का उपयोग कर, $\partial J/\partial x_u$ पर विचार कीजिए और प्रमेय 10 का प्रयोग कीजिए।

3. $\triangle_1=(a_2b_3c_4)$, $\triangle_2=(a_3b_4c_1)$, $\triangle_3=(a_4b_1c_2)$, $\triangle_4=(a_1b_2c_3)$, और A_r^s, $\triangle_s$ में a_r का सहखंड है। सिद्ध कीजिए कि, $A_3^1=-A_1^3$, और $A_4^1=A_1^4$, और यह भी कि :—

$$\begin{vmatrix} A_1^2 & A_2^3 & A_3^1 \\ B_1^2 & B_2^3 & B_3^1 \\ C_1^2 & C_2^3 & C_3^1 \end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix} A_1^4 & A_2^3 & A_3^1 \\ B_1^4 & B_2^3 & B_3^1 \\ C_1^4 & C_2^3 & C_3^1 \end{vmatrix}=\triangle_1\ \triangle_3$$

सुझाव :—(प्रमेय 17 मे) $B_2^3C_1^3-B_1^3C_2^3=-a_4\triangle_3$ अब प्रमेय 10 का प्रयोग कीजिए। 4. $\triangle$, यदि n कोटि का एक डिटर्मिनेंट हो, a_{rs}, $\triangle$ का एक प्रतिनिधि अवयव हो, A_{rs}, $\triangle$ में a_{rs} का सहखण्ड हो और $\triangle\neq 0$. तो सिद्ध कीजिए,

$$\begin{vmatrix} A_{11}+\triangle/x & A_{12} & .. & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}+\triangle/x & .. & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & .. & A_{nn}+\triangle/x \end{vmatrix}=0$$

जब भी

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & .. & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn}+x \end{vmatrix}=0$$

5. सिद्ध कीजिए कि अंतरों (differences) के चिह्नों में उचित और उपयुक्त विन्यास के सहित —

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha & \cos\alpha & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \\ 1 & \sin\beta & \cos\beta & \sin 2\beta & \cos 2\beta \\ 1 & \sin\gamma & \cos\gamma & \sin 2\gamma & \cos 2\gamma \\ 1 & \sin\delta & \cos\delta & \sin 2\delta & \cos 2\delta \\ 1 & \sin\Sigma & \cos\varepsilon & \sin 2\varepsilon & \cos 2\varepsilon \end{vmatrix}=256\ \Pi \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

6. सिद्ध कीजिए, $\Delta = | a_{rs} |$ और यदि संकलन की परिपाटी (summation convention) का अनुसरण किया जाए, ('मूक' अनुबंधों के लिए केवल ग्रीक अक्षरों का ही प्रयोग किया जाए।), तो प्रमेय 10 के परिणामों को इस प्रकार प्रकट कर सकते हैं—

$$a\alpha_s = 0 = ar\alpha A_{s\alpha} \text{ जब } r \neq s,$$

$$a_{\alpha s} \ A_{\alpha r} = \Delta = a_{r\alpha} A_{s\alpha} \text{ जब } r = s.$$

यह भी सिद्ध कीजिए कि यदि n चर x दूसरे n चरों X से $X_r = a_{r\alpha} x_\alpha$ के रूपांतरण (transformation) द्वारा संबद्ध हों तो— $\Delta x_s = A_{\alpha s} X_\alpha$.

7. प्रमेय 9 को, दिए हुए चक्रक (circulant) और डिटर्मिनेंट $(\omega_1, \omega_2^n, \ldots \omega_n^n)$ के गुणनफल द्वारा सिद्ध कीजिए, जहाँ $\omega_1, \ldots \omega_n$ एक (unity) के n-वें भिन्न-भिन्न मूल हैं।

8. सिद्ध कीजिए कि, यदि $f_r(a) = g_r(a) = h_r(a)$ जब $r = 1, 2, 3$ तो निम्नलिखित डिटर्मिनेंट में, जिसके अवयव, x में बहुपद हैं, $(x-a)^2$ एक खंड है।

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(x) & g_2(x) & h_2(x) \\ f_3(x) & g_3(x) & h_3(x) \end{vmatrix}$$

[सुझाव: एक ऐसे डिटर्मिनेंट पर विचार कीजिए जिसमें $c_1' = c_1 - c_2$, $c_2' = c_2 - c_3$, और शेषफल-प्रमेय (remainder theorem) का उपयोग कीजिए]

9. यदि किसी डिटर्मिनेंट के अवयव, x में बहुपद हैं और जब $x = a$ हो तो यदि r स्तंभ (पंक्तियाँ) बराबर हो जाते हैं तो डिटर्मिनेंट का एक खंड $(x-a)^{r-1}$ है।

10. जब $n = 5$, $a_1 = a_4 = a_5 = 1$, $a_2 = a$ और $a_3 = a^2$ हों तो इस की स्वतंत्र उपपत्तियों द्वारा कि डिटर्मिनेंट और गुणनफल दोनों

$$(a^2 + a + 3)(a-1)^4(a^4 + 3a^3 + 4a^2 + 2a + 1)$$

के बराबर हैं—प्रमेय 9 की जाँच कीजिए।

भाग II

मैट्रिक्स (MATRICS)

अध्याय 6

परिभाषाएँ और प्राथमिक गुणधर्म

1. एकघात प्रतिस्थापन (Linear Substitutions)

वास्तविक या संमिश्र (real or complex) n संख्याओं पर हम दो प्रकार से विचार कर सकते हैं। पहला, यह कि वे अलग-अलग सत्ता वाली x_1, $x_2, \ldots, x_n$ संख्याएँ हैं; दूसरा यह कि उसकी केवल एक सत्ता x है और उसको उसके n टुकड़ों में, या घटकों में, इच्छानुसार अलग किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, साधारण त्रि-विम आकाश में, (three-dimensional space), किसी बिंदु O से गुजरने वाले कुछ अक्ष दिए हों और किसी दूसरे बिंदु P की स्थिति इन अक्षरों के सापेक्ष निर्देशांकों से निर्धारित की जा सकती हो तो हम बिंदु P पर, अथवा दूरी OP पर दो प्रकार से विचार कर सकते हैं, वेक्टर (vector) OP के (अथवा बिंदु P के) रूप में और उसको x से प्रकट करें या हम अक्षों के अनुदिश वेक्टर के घटकों (components) x_1, x_2, x_3 को प्रमुखता दें और x को (x_1, x_2, x_3) से प्रकट करें।

जब हम x को केवल एक अस्तित्व या सत्ता का मानते हैं तो उसको हम एक 'संख्या' (number) कहते हैं। यह किसी संमिश्र संख्या z के अध्ययन में प्रचलित रीति का ही हल्का-सा विस्तार-सा है जो, वास्तव में, x और y दो वास्तविक संख्याओं का युग्म† होती है।

अब, मान लीजिए, दो संख्याएं x और X, जिनके घटक क्रमशः $x_1, x_2, \ldots, x_n$ और $X_1, X_2, \ldots X_n$ हैं, निम्नलिखित n समीकरणों के एक समुच्चय द्वारा संबद्ध है—

$$X_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n \quad (r = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

जिसमें a_{rs} दिए हुए अचर हैं।

(उदाहरण के लिए, निर्देशांक ज्यामिति में अक्षों के परिवर्तन (change of axes) पर विचार कीजिए जहाँ x_r और X_r एक ही वेक्टर के घटक हैं जो अक्षों के अलग-अलग समुच्चयों के सापेक्ष हैं।)

वास्तविक या संमिश्र, n^2 संख्याओं के समुच्चय के लिए A को संकेतन (notation) के रूप में लाइए—

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}$$

†देखिए— जी० एच० हार्डी, प्योर मैथेमेटिक्स, अध्याय तीन।

और Ax संकेतन से उस 'संख्या' को समझिए जिसके घटक (1) समीकरणों के दाहिने तरफ के व्यंजकों के द्वारा दिए जाते हैं। तो प्रतीकात्मक रूप से (1) के समीकरणों को हम यों लिख सकते हैं—

$$X=Ax \qquad (2)$$

थोड़े से अभ्यास से ही पाठक यह जान जाएगा कि जब भी (1) की तरह के समीकरणों पर विचार हो रहा हो तो केवल (2) की तरह के प्रतीकात्मक समीकरणों के लिखने से ही काम चल सकता है।

2. मैट्रिक्स-योग समझने के लिए एकघात प्रतिस्थापन

(Linear substitutions as a guide to matrix addition)

वेक्टर ज्यामिति का यह एक सुपरिचित तथ्य है कि दो वेक्टर X और Y, जिनके घटक क्रमशः X_1, X_2, X_3 और Y_1, Y_2, Y_3 हैं, का संकलन अथवा जोड़ एक वेक्टर Z, या X+Y होता है जिसके घटक X_1+Y_1, X_2+Y_2, X_3+Y_3 होते हैं।

अब, एक 'संख्या' x और एक 'संख्या' X पर विचार कीजिए जिनका संबंध यों है—

$$X=Ax, \qquad (2)$$

जहाँ A का अर्थ वही है जो § 1 में है। एक दूसरी 'संख्या' Y भी लीजिए, जो इस प्रकार है—

$$Y=Bx, \qquad (3)$$

जहाँ, B इन n^2 संख्याओं के समुच्चय का प्रतीक है—

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{matrix}$$

और, (3) निम्नलिखित n समीकरणों का एक प्रतीकात्मक रूप है—

$$Y_r=b_{r1}x_1+b_{r2}x_2+\ldots+b_{rn}x_n \qquad (r=1,\ 2,\ldots,n)$$

स्वभावतः, हम समतल में अथवा आकाश में, वेक्टरों की तुलना के बाद, X+Y से उस 'संख्या' को प्रकट करते हैं जिसके घटक X_r+Y_r हैं। परंतु

$$X_r+Y_r=(a_{r1}+b_{r1})x_1+(a_{r2}+b_{r2})x_2+\ldots+(a_{rn}+b_{rn})x_n,$$

और इसलिए हम

$$X+Y=(A+B)x$$

लिख सकते हैं बशर्ते कि हम A+B से निम्नलिखित n^2 संख्याओं के समुच्चय को समझें—

$$\begin{matrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{matrix}$$

इस प्रकार हम A और B जैसे दो प्रतीकों के योगफल अथवा जोड़ की परिभाषा की तरफ बढ़ रहे हैं। अगले परिच्छेद में हम इसका सक्ष्मता से अध्ययन करेंगे।

3. मैट्रिक्स (Matrices)

3.1. पिछले परिच्छेद में A और B जिन समुच्चयों के प्रतीक हैं उनमें स्तंभों और पंक्तियों की संख्या बराबर थी। अब जो परिभाषा हम देंगे उसमें इस बंधन को नहीं रखा जाएगा और उन समुच्चयों पर भी विचार होगा जिनमें स्तंभों और पंक्तियों की संख्या अलग-अलग हो सकती है।

परिभाषा 1.—**वास्तविक या संमिश्र, mn संख्याओं की एक सरणी को, जिसमें m पंक्तियां और n स्तंभ हों, मैट्रिक्स कहते हैं।**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix},$$

जब m=n होता है, तो सरणी को n कोटि का वर्ग मैट्रिक्स कहते हैं।

लिखते समय एक मैट्रिक्स को प्राय: केवल एक अक्षर A या α या और किसी प्रतीक से ही प्रकट करते हैं। उदाहरणार्थ, परिभाषा में दिए गए मैट्रिक्स के लिए एक प्रचलित संकेतन $[a_{rs}]$ है। इसमें गुरु कोष्ठक (square bracket) का प्रतीक भी परिपाटी से ही, यह बताने के लिए चला आ रहा है कि हम डिटर्मिनेंट पर विचार नहीं कर रहे हैं। इसको सुविधा के लिए 'मैट्रिक्स' पढ़ा जाता है।

जैसा हमने देखा कि मैट्रिक्सों का विचार एकघात प्रतिस्थापनों से आरंभ हुआ जिनकी चर्चा §2 में की गई है। लेकिन, §2 के A में, और किसी मैट्रिक्स को प्रकट करने वाले A में एक महत्वपूर्ण अंतर है। प्रतिस्थापनों में, A को किसी 'संख्या' x के संकारक (operator) या संक्रिया करने वाले की तरह समझा जाता है। मैट्रिक्स की परिभाषा में A के इस आशय को, जो किसी और चीज़ के सापेक्ष हो, जानबूझकर छोड़ दिया जाता है जिससे कि मैट्रिक्स संकेतन विस्तृत अर्थों में प्रयुक्त हो सके।

3.2. अब हम कुछ ऐसी परिभाषाएँ देंगे जिनसे A+B, A−B, 2A, आदि प्रतीकों के अर्थ सूक्ष्म और सुनिश्चित रूप से नियत किए जा सकें, जब A और B दो मैट्रिक्सों को प्रकट करते हैं।

परिभाषा 2.—**दो मैट्रिक्स A और B योग के लिए अनुकूलनीय** (CONFORMABLE FOR ADDITION) **होते हैं जब प्रत्येक में पंक्तियों की संख्या एक और प्रत्येक में स्तंभों की संख्या एक ही हो।**

"इसका तात्पर्य यह है कि जितनी पंक्तियाँ A में हैं उतनी ही पंक्तियाँ B में हैं, इसी प्रकार जितने स्तंभ A में हैं उतने ही B में हैं।"

परिभाषा 3.—**योग** (ADDITION)—**एक मैट्रिक्स A, जिसकी r-वीं पंक्ति और s-वें स्तंभ का अवयव** a_{rs} **है और एक दूसरे मैट्रिक्स B, जिसकी r-वीं पंक्ति और s-वें**

स्तंभ का अवयव b_{rs} है, के योग अथवा संकलन की परिभाषा तभी सार्थक और संभव है जब A, B योग के लिए अनुकूलनीय हों, और तब उसकी परिभाषा उस मैट्रिक्स से दी जाती है जिसकी r-वीं पंक्ति और s-वें स्तंभ का अवयव $a_{rs}+b_{rs}$ है।

संकलन को A+B से प्रकट करते हैं।

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \text{ और } \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} \text{ दोनों मैट्रिक्स}$$

अलग-अलग हैं; पहले वाला 2 कोटि के किसी वर्ग मैट्रिक्स (square matrix) के साथ नहीं जोड़ा जा सकता, जब कि दूसरा जोड़ा जा सकता है; जैसे;

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

परिभाषा 4.—मैट्रिक्स A वह मैट्रिक्स है जिसके अवयव A के अवयवों को −1 गुणा करने पर आते हैं।

परिभाषा 5.—व्यवकलन (SUBTRACTION).

A−B की परिभाषा या व्याख्या A+(−B) से दी जाती है। इसको दो मैट्रिक्सों का अंतर कहते हैं।

उदाहरणार्थ, मैट्रिक्स −A परिभाषा के अनुसार, मैट्रिक्स [−a, −b] है, जहाँ A एक-पंक्ति का मैट्रिक्स [a, b] है। साथ ही परिभाषा 5 से,

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_2 & -b_2 \\ -c_2 & -d_2 \end{bmatrix}$$

और यह, परिभाषा 3 से,

$$\begin{bmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 \\ c_1-c_2 & d_1-d_2 \end{bmatrix}$$

के बराबर होता है।

परिभाषा 6.—एक मैट्रिक्स, जिसका प्रत्येक अवयव शून्य है, शून्य-मैट्रिक्स (NULL MATRIX) कहा जाता है और 0 लिखा जाता है।

परिभाषा 7.—दो मैट्रिक्स A और B समान कहे जाते हैं, और हम A=B लिखते हैं, जब दोनों मैट्रिक्स योग के लिए अनुकूलनीय हों और A का प्रत्येक अवयव, B के संगत अवयव के बराबर हो।

परिभाषा 6 और 7 से यह स्पष्ट हो जाता है कि 'A=B' और 'A−B=0' का तात्पर्य एक ही होता है, अर्थात् यह कि प्रत्येक a_{rs} प्रत्येक संगत b_{rs} के बराबर होता है।

परिभाषा 8.—किसी संख्या द्वारा गुणन

यदि r कोई, वास्तविक या संमिश्र, संख्या है और A कोई मैट्रिक्स है तो rA एक ऐसा मैट्रिक्स कहा जाता है जिसका प्रत्येक अवयव A के प्रत्येक संगत अवयव का r-गुना होता है

उदाहरणार्थ, यदि

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \quad \text{तो } 3A=\begin{bmatrix} 3a_1 & 3b_1 \\ 3c_1 & 3d_1 \end{bmatrix}$$

3, 5 और 8 परिभाषाओं से यह स्पष्ट है कि यदि हम $A+A$ के स्थान पर $2A$, $5A-2A$ के स्थान पर $3A$, आदि-आदि, लिख दें तो वह न्याय संगत होगा। इसी तर्क के विस्तार से हम यह भी कह सकते हैं कि किसी मैट्रिक्स को अनेकों मैट्रिक्सों के योग या संकलन के रूप में भी लिखा जा सकता है, उदाहरणार्थ $A+A+A+(1+i)A$ के बदले $(4+i)A$ भी लिखा जा सकता है।

3.3 अब, क्योंकि मैट्रिक्सों का योग या व्यवकलन सीधे उनके अवयवों के योग या व्यवकलन पर आधारित होता है जो वास्तविक या संमिश्र संख्याएँ होती हैं, यह कहा जा सकता है कि साधारण बीजगणित में योग के लिए जो नियम लागू होते है वही नियम मैट्रिक्सों के योग में भी लागू होते हैं; बीजगणित में योग और व्यवकलन में जो नियम लगते है वे यों हैं—

(i) साहचर्य-नियम (associative law), जिसका एक उदाहरण है—

$$(a+b)+c=a+(b+c),$$

जिनमें से प्रत्येक को $a+b+c$ से प्रकट किया जा सकता है।

(ii) क्रमविनिमय नियम (commutative law), जिसका एक उदाहरण यों है—

$$a+b=b+a;$$

(iii) वंटन-नियम (distributive law), जिसके उदाहरण इस प्रकार हैं—

$$r(a+b)=ra+rb, \quad -(a-b)=-a+b$$

मैट्रिक्स समीकरण $(A+B)+C=A+(B+C)$ को $(a+b)+c=a+(b+c)$ का सीधा और संलग्न परिणाम ही कहा जा सकता है, जहाँ ह्रस्व अक्षर, (a, b, आदि), A, B, C मैट्रिक्सों की (मान लीजिए), r-वीं पंक्ति और s-वें स्तंभ के अवयवों को प्रकट करते हैं, और प्रत्येक संकलन को $A+B+C$ से प्रकट किया जा सकता है। इसी प्रकार, मैट्रिक्स समीकरण $A+B=B+A$ को भी $a+b=b+a$ का सीधा और संलग्न परिणाम कहा जा सकता है। अतएव, साहचर्य और क्रमविनिमय के नियम योग और व्यवकलन के लिए संतुष्ट हो जाते हैं और निम्नलिखित व्यंजक परस्पर सही और दुरुस्त हैं—

$$A+B+(C+D)=A+B+C+D$$
$$=(B+C)+(A+D)$$

आदि, आदि।

दूसरी तरफ, इस आधार पर कि

$$r(a+b)=ra+rb$$

जब r, a, b, वास्तविक या संमिश्र संख्याएँ हैं, यद्यपि हम

$$r(A+B)=rA+rB$$

लिख सकते हैं जब, r, वास्तविक या संमिश्र कोई संख्या है, हमने वास्तव में अभी तक R(A+B), RA, RB आदि प्रतीकों का अर्थ निश्चित नहीं किया है, जब R, A, B सब ही मैट्रिक्स हैं। इसकी चर्चा हम अगले परिच्छेदों में करेंगे।

4. मैट्रिक्स गुणन के लिए एकघात प्रतिस्थापन (Linear Substitutions as a guide to matrix multiplication)

निम्नलिखित समीकरणों को देखिए—

$$\left.\begin{aligned} x_1&=a_{11}y_1+a_{12}y_2, & y_1&=b_{11}z_1+b_{12}z_2 \\ x_2&=a_{21}y_1+a_{22}y_2, & y_2&=b_{21}z_1+b_{22}z_2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

जहाँ a और b दिए हुए अचर (constants) हैं। इनकी सहायता से हम x_1, x_2 को a, b और z_1, z_2 के पदों में व्यक्त कर सकते हैं; वास्तव में,

$$\left.\begin{aligned} x_1&=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})z_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})z_2, \\ x_2&=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})z_1+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})z_2, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

यदि § 1 के संकेतन का प्रयोग किया जाए तो ऊपर (1) के समीकरणों को इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$x=Ay, \quad y=Bz \quad (1a)$$

और यदि x को सीधे ही z के पदों में कहें तो,

$$x=ABz, \quad (2a)$$

बशर्ते कि हम AB का मतलब यह लगाएं कि (2a) वास्तव में (2) के समीकरणों का एक प्रतीकात्मक रूप ही है; अर्थात् AB से निम्नलिखित मैट्रिक्स का मतलब लिया जाए,

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}, & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}, & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \quad (3)$$

इससे हमें A और B दो मैट्रिक्सों के गुणनफल AB की औपचारिक परिभाषा का आभास मिल जाता है। लेकिन इस परिभाषा से पहले, सुविधा की दृष्टि से, दो संख्याओं, के 'आंतरिक' गुणनफल (Scalar product) की परिभाषा दे देना अधिक उचित होगा।

5. दो संख्याओं का आंतरिक गुणनफल (The scalar product or inner product of two numbers)

परिभाषा 9—मान लीजिए, §1 में दिए गए अर्थों में, x और y दो संख्याएँ हैं। इनके घटक यदि $x_1, x_2, \ldots, x_n$ और $y_1, y_2, \ldots, y_n$ हैं तो $x_1 y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$ को दोनों संख्याओं का 'आंतरिक गुणनफल' कहते हैं। दोनों संख्याओं के घटकों की संख्या यदि m और n है और यदि $m \neq n$ हो तो 'आंतरिक गुणनफल' अर्थहीन हो जाता है अर्थात् संभव नहीं होता।

वर्णन की दृष्टि से इस परिभाषा का उपयोग करते समय हम 'संख्या' शब्द को कुछ विस्तृत और विशद अर्थों में लेंगे। इस प्रकार, यदि हमारे पास दो मैट्रिक्स $[a_{rs}]$ और $[b_{rs}]$ हैं तो,

$$a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+\ldots+a_{1n}b_{n2} \quad (1)$$

से हमारा तात्पर्य, $[a_{rs}]$ की पहली पंक्ति का $[b_{rs}]$ के दूसरे स्तंभ द्वारा आंतरिक गुणनफल से होगा, दूसरे शब्दों में, $[a_{rs}]$ की पहली पंक्ति को हम एक ऐसी 'संख्या' मान लेते हैं जिसके घटक $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$ हैं। इसी प्रकार $[b_{rs}]$ के दूसरे स्तंभ से हमारा मतलब उस 'संख्या' से होता है जिसके घटक $(b_{12}, b_{22}, \ldots, b_{n2})$ हैं।

6. मैट्रिक्स गुणन (Matrix multiplication)

6.1. परिभाषा 10—**दो मैट्रिक्स A, B को, गुणनफल AB के लिए अनुकूलनीय (CONFORMABLE FOR THE PRODUCT AB) कहे जाते हैं जब A में स्तंभों की संख्या, B में पंक्तियों की संख्या के बराबर होती है।**

परिभाषा 11—गुणनफल—**गुणनफल AB की परिभाषा तभी संभव है जब A, B मैट्रिक्स इस गुणनफल के लिए अनुकूलनीय हों: तब यह एक ऐसा मैट्रिक्स होता है जिसकी i-वीं पंक्ति और k-वें स्तंभ का अवयव A की i-वीं पंक्ति का, B के k-वें स्तंभ से आंतरिक गुणनफल के बराबर होता है।**

परिभाषा से तत्काल ही यह परिणाम† निकाला जा सकता है कि AB में पंक्तियों की संख्या वही है जो A में है और AB में स्तंभों की संख्या वही है जो B में है।

मैट्रिक्सों के अनुकूलन की आवश्यकता का अनुभव दो अननुकूलनीय मैट्रिक्सों (non-conformable matrices) पर गुणन का प्रयत्न करके किया जा सकता है। इस प्रकार,

$$\text{यदि } A=\begin{bmatrix} a_1, \\ a_2, \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix},$$

है, तो AB की परिभाषा संभव नहीं है याने AB का कोई अर्थ नहीं रह जाता, क्योंकि A की प्रत्येक पंक्ति में केवल एक अक्षर है जबकि B के प्रत्येक स्तंभ में दो अक्षर हैं जिसके परिणाम-स्वरूप परिभाषा में अपेक्षित 'आंतरिक गुणनफल' नहीं बनाया जा सकता। दूसरी तरफ,

$$BA=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} b_1a_1+c_1a_2 \\ b_2a_1+c_2a_2 \end{bmatrix},$$

जो एक ऐसा मैट्रिक्स है जिसकी 2 पंक्तियाँ और 1 स्तंभ है।

---

†अच्छा होगा कि पाठक कुछ गुणनफलों को स्वयं भी करके देखें। एक-दो उदाहरण §§.6.1, 6.3 में दिए गए हैं।

6.2 प्रमेय 22—मैट्रिक्स AB, सामान्यतया, मैट्रिक्स BA से भिन्न होता है।

जैसा हमने देखा है, हम AB और BA दोनों तभी बना सकते हैं जब A के स्तंभों की संख्या B की पंक्तियों की संख्या के बराबर, और B के स्तंभों की संख्या A की पंक्तियों की संख्या के बराबर हो। इन गुणनफलों को बनाने के बाद i-वी पंक्ति और k-वें स्तंभ में अवयव क्रमश: यों होंगे—

AB में, A की i–वीं पंक्ति का B के k–वें स्तंभ से आंतरिक गुणनफल;

BA में, B की i–वीं पंक्ति का A के k–वें स्तंभ से आंतरिक गुणनफल। जिसके फलस्वरूप मैट्रिक्स AB, सामान्यतया, वही मैट्रिक्स नहीं होता जो BA है।

6.3. पूर्व-गुणन और उत्तर-गुणन (Pre-multiplication and post-multiplication) : क्योंकि AB और BA प्राय: भिन्न होते हैं इस उक्ति में कि 'A को B से गुणा कीजिए' कोई सूक्ष्मता और सुनिश्चितता तब तक नहीं आ सकती जब तक यह स्पष्ट न हो जाए कि इस कथन का तात्पर्य AB से है या BA से। इसलिए, स्पष्टता के लिए हम पूर्व-गुणन और उत्तर-गुणन† का प्रयोग करेंगे यद्यपि हमारा प्रयत्न यही होगा कि इन बड़े-बड़े शब्दों के प्रयोग के बिना भी काम चलाया जा सके। मैट्रिक्स A का, मैट्रिक्स B से उत्तर-गुणन करने पर मैट्रिक्स AB प्राप्त होता है; मैट्रिक्स A का, मैट्रिक्स B से पूर्व-गुणन करने पर मैट्रिक्स BA प्राप्त होता है।

गुणन के कुछ सरल उदाहरण यों हैं—

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha+b\beta & a\gamma+b\delta \\ c\alpha+d\beta & c\gamma+d\delta \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+hy+gz \\ hx+by+fz \\ gx+fy+cz \end{bmatrix}.$$

6.4. गुणन के लिए बंटन-नियम (The distributive law for multiplication)

संमिश्र संख्याओं (complex numbers) के गुणनफल में जो नियम लागू होते हैं उनमें एक बंटन-नियम भी है जिसका एक उदाहरण $a(b+c)=ab+ac$ है। यह नियम मैट्रिक्सों के बीजगणित पर भी लागू होता है।

सुविधा की दृष्टि से, शुरू में हम केवल n कोटि के वर्ग मैट्रिक्सों पर ही विचार करेंगे, और $[a_{ik}]$, $[b_{ik}]$,.. आदि को प्रकट करने के लिए A, B,... आदि का प्रयोग करेंगे।

---

†अंग्रेज़ी में इनके पर्याय क्रमश: Pre-multiplication और Post-multiplication हैं यद्यपि कुछ लेखक Pre- के स्थान पर fore- और Post के स्थान पर aft- का प्रयोग भी करते हैं।

हम यह जानते हैं कि $[a_{ik}]$ संकेतन से हमें उस मैट्रिक्स का बोध होता है जिसकी i-वीं पंक्ति और k-वें स्तंभ का अवयव उपर्युक्त संकेतन से पहचाना जाता है। फलस्वरूप परिभाषा 11 से,

$$[a_{ik}]\times[bik]=\left[\sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} b_{\lambda k}\right].$$

इस संकेतन में हम इस प्रकार लिख सकते हैं—

$$A(B+C)=[a_{ik}]\times([b_{ik}]+[c_{ik}])$$

$$=[a_{ik}]\times[b_{ik}+c_{ik}] \quad \text{(परिभाषा 3 से)}$$

$$=\left[\sum_{\lambda=\lambda}^{n} a i\lambda(b\lambda k+c\lambda k)\right] \quad \text{(परिभाषा 11)}$$

$$=\left[\sum_{\lambda=\lambda}^{n} [a_i\lambda b\lambda k]\right]+\left[\sum_{\lambda=\lambda}^{n} a_{i\lambda}c\lambda k]\right] \quad \text{(परिभाषा 3)}$$

$$=AB+AC \quad \text{(परिभाषा 11)}$$

इसी तरीके से,

$$(A+B)C=AC+BC$$

भी सिद्ध किया जा सकता है।

6.5. गुणन के लिए साहचर्य नियम (The associative law for multiplication) संमिश्र संख्याओं के गुणनफल पर लागू होने वाला एक दूसरा नियम साहचर्य नियम है। इसका उदाहरण (ab)c=a(bc) है जिसमें से प्रत्येक को abc से प्रायः प्रकट किया जाता है।

अब हम इसी प्रकार के उन संबंधों पर विचार करेंगे जो n कोटि के तीन वर्ग मैट्रिक्स A, B, C में होते हैं। हम यह सिद्ध करेंगे कि (AB)C=A(BC) और भविष्य में इनमें से प्रत्येक को ABC से प्रकट करेंगे।

मान लीजिए, $B=[b_{ik}]$, $[C=c_{ik}]$ और $BC=[\gamma_{ik}]$, जहाँ, परिभाषा 11 के अनुसार,

$$\gamma_{ik}=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, c_{jk}$$

तो, A(BC) एक ऐसा मैट्रिक्स होगा जिसकी i-वीं पंक्ति और k-वें स्तंभ का अवयव यों होगा—

$$\sum_{l=1}^{n} a_{il}\gamma_{lk} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \sum_{j=1}^{n} b_{lj}c_{jk} = \sum_{=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{il}\, b_{lj}\, c_{jk}, \quad (1)$$

इसी प्रकार, मान लीजिए $AB=[\beta_{lk}]$, जहाँ, परिभाषा 11 से,

$$\beta_{lk}=\sum_{j=1}^{n} a_{lj}\, b_{jk}$$

तब, (AB)C एक ऐसा मैट्रिक्स है जिसकी i-वीं पंक्ति और k-वें स्तंभ का अवयव यों है—

$$\sum_{l=1}^{n} \beta_{il}\, c_{lk}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jl}\, c_{lk} \qquad (2)$$

लेकिन (2) के व्यंजक से वही पद आते है जो (1) से प्राप्त होते हैं यद्यपि उनकी तरतीब या विन्यास में क्रम अलग होता है; उदाहरण के लिए, (1) में $l=2, j=3$ वाला पद वही है जो (2) में $l=3, j=2$ का संगत पद है।

अतएव, A(BC)=(AB)C और हम इन दोनों को ABC के प्रतीक से प्रकट कर सकते हैं।

A^2, A^3, ...आदि के द्वारा हम AA, AAA,... आदि को प्रकट करते हैं।

6.6. **संकलन को परिपाटी** (**The summation convention**) हमारी अब तक की चर्चा में सन्निहित सिद्धांत या तत्व को समझ लेने के बाद यह उचित होगा कि हम संकलन की परिपाटी (अध्याय 3) का उपयोग आरंभ कर दें, जिसके अनुसार,

$$b_{ij}\, c_{jk},\ \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, c_{jk} \text{ को प्रकट करता है।}$$

इसी के विस्तार से,

$$a_{il}\, b_{lj}\, c_{jk},\ \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{il}\, b_{lj}\, c_{jk} \text{ को प्रकट करता है।}$$

और एक बार § 6.5 के (1) और (2) की रचना और रूप को समझ जाने के बाद यह स्पष्ट हो जाता है कि इस प्रकार के व्यंजक में बारंबार आने वाला कोई भी अनुबंध 'मूक अनुबंध' (dummy suffix) होगा और उसके स्थान पर कोई दूसरा भी रखा जा सकता है; उदाहरणार्थ,

$$a_{il}\, b_{lj}\, c_{jk}=a_{ij}\, b_{jl}\, c_{lk}$$

इसके अतिरिक्त, परिपाटी के उपयोग से किसी गुणनफल ABC....Z के अवयवों की रचना का नियम स्पष्ट हो जाता है; और वास्तव में, मैट्रिक्सों का यह गुणनफल इस प्रकार है—

$$[a_{il}\, b_{lj}\, c_{jm} \ldots z_{tk}]$$

इसमें केवल i और k ही ऐसे अनुबंध हैं जो 'मूक' नहीं हैं।

7. गुणन के लिए क्रमविनिमय नियम (The Commutative Law for Multiplication)

7.1. तीसरा नियम जो संमिश्र संख्याओं के गुणन में लागू होता है क्रम विनिमय-नियम कहलाता है। इसका उदाहरण, ab=ba है। प्रमेय 22 से हम यह जानते हैं कि मैट्रिक्सों में यह नियम लागू नहीं होता, लेकिन इसका एक महत्त्वपूर्ण अपवाद भी है।

परिभाषा **12.** **n कोटि के एक ऐसे वर्ग मैट्रिक्स को, n कोटि का तत्समकारी मैट्रिक्स** (UNIT MATRIX) **कहते हैं, जिसके अग्रग विकर्ण सब स्थानों पर एक हों और इसके अलावा अन्य सब स्थानों में शून्य हों। इसको I से प्रकट करते हैं।**

I में पंक्तियों और स्तंभों की संख्या n का अर्थ संदर्भ से स्पष्ट हो जाता है। अतएव, विभिन्न कोटि के तत्समकारी मैट्रिक्सों के लिए पृथक्-पृथक प्रतीकों की आवश्यकता प्रायः नहीं पड़ती।

मान लीजिए, C, nकोटि का कोई वर्ग मैट्रिक्स, और I, nकोटि का तत्समकारी मैट्रिक्स है; तो IC=CI=C

$$\text{और, } I=I^2=I^3=\ldots.$$

इसलिए, I में वही गुणधर्म है जो साधारण बीजगणित में एक में होते है। जैसे हम, साधारण बीजगणित में $1\times x$ और $x\times 1$ के बदले x रख सकते हैं उसी प्रकार मैट्रिक्सों के बीजगणित में हम $I\times C$ और $C\times I$ के बदले C रख सकते हैं।

इसके अतिरिक्त यदि k कोई, वास्तविक या संमिश्र संख्या है, तो kI.C=C.kI और इनमें से प्रत्येक kC मैट्रिक्स के बराबर होगा।

7.2. यह ध्यान देने की बात है कि यदि A एक ऐसा मैट्रिक्स है जिसमें n पंक्तियाँ हैं, B ऐसा मैट्रिक्स है जिसमें n स्तंभ हैं, और I, n कोटि का तत्समकारी मैट्रिक्स है तो IA=A और BI=B, यद्यपि A और B वर्ग मैट्रिक्स नहीं हैं, यदि A वर्ग मैट्रिक्स नहीं है तो A और I, गुणनफल AI के लिए अनुकूलनीय नहीं होंगे।

8. भाजन नियम (The Division Law)

साधारण बीजगणित में भाजन-नियम भी लागू होता है जिसके अनुसार, यदि गुणनफल xy शून्य है तो, या तो x, या y, या दोनों ही, शून्य होने चाहिएँ। यह नियम मैट्रिक्स गुणनफलों पर लागू नहीं होता। शून्य मैट्रिक्स (null matrix) को प्रकट करने के लिए O का उपयोग कीजिए। तो, AO=OA=O, लेकिन यह ज़रूरी नहीं है कि समीकरण AB=O का अभिप्राय यह ही हो कि A या B शून्य मैट्रिक्स है। उदाहरण के लिए, यदि

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b & 2b \\ -a & -2a \end{bmatrix},$$

तो गुणनफल AB एक शून्य मैट्रिक्स है, हालाँकि न तो A ही शून्य मैट्रिक्स और न B ही।

इसके अलावा, यह भी संभव है कि AB तो शून्य हो और BA शून्य न हो। उदाहरणार्थ, यदि

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} b & 0 \\ -a & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{तो,} \quad AB \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad BA=\begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}$$

9. पिछले परिच्छेदों का सारांश

हम यह देख चुके हैं कि A, B, . . . आदि प्रतीक जो मैट्रिक्सों को प्रकट करते हैं, जोड़े जा सकते हैं, गुणा किए जा सकते हैं और बहुधा साधारण संख्याओं की तरह का व्यवहार दिए जा सकते हैं मानो वे साधारण संख्याओं को ही प्रकट करते हों।

साधारण संख्या a, b और मैट्रिक्स A, B में जो अंतर है उसे इस प्रकार कह सकते हैं—

(i) यद्यपि $ab=ba$ होता है तथापि AB प्रायः BA से भिन्न होता है।

(ii) यद्यपि $ab=0$ में यह निहित होता है कि या तो a, या b, या दोनों ही शून्य हैं, तथापि $AB=0$ समीकरण में यह आवश्यक नहीं है कि या तो A या B को शून्य होना ही चाहिए। प्रमेय 29 में हम इस चर्चा पर फिर आएँगे।

10. किसी वर्ग मैट्रिक्स का डिर्टमिनेंट

10.1. यदि A एक वर्ग मैट्रिक्स है तो ऐसा डिर्टमिनेंट, जिसके अवयव वही हों जो मैट्रिक्स के हैं और उन्हीं स्थानों पर हों, मैट्रिक्स का डिर्टमिनेंट कहा जाता है। इसको प्रायः $|A|$ से प्रकट करते हैं। इस प्रकार, यदि A की i-वीं पंक्ति और k-वें स्तंभ में a_{ik} अवयव हैं, जिससे $A=[a_{ik}]$, तो $|A|$, डिर्टमिनेन्ट $|a_{ik}|$ को प्रकट करता है।

प्रमेय 13 से सहज ही यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि यदि A और B, n कोटि के वर्ग मैट्रिक्स हैं और इन दोनों मैट्रिक्सों का गुणनफल AB है तो **मैट्रिक्स AB का डिर्टमिनेंट, A और B मैट्रिक्सों के डिर्टमिनेंटों के गुणनफल के बराबर होता है;** अर्थात्

$$|AB|=|A|\times|B|$$

इसी प्रकार, $$|BA|=|B|\times|A|$$

चूँकि $|A|$ और $|B|$ संख्याएं हैं, इसलिए क्रमविनिमय का नियम (commutative law) उनके गुणनफल के लिए लागू होगा और $|A|\times|B|=|B|\times|A|$

अतएव, $|AB|=|BA|$, यद्यपि मैट्रिक्स AB मैट्रिक्स BA से भिन्न है। इसका कारण यह है कि डिर्टमिनेन्ट के मान में, पंक्तियों और स्तंभों के विनिमय से, कोई अन्तर नहीं पड़ता जबकि सामान्यतया मैट्रिक्स के मान में ऐसे विनिमय से अन्तर पड़ जाता है।

10.2. इस बात पर ध्यान देना आवश्यक है कि § 10.1 के समीकरण $|AB| = |A| \times |B|$ में A और B दोनों ही मैट्रिक्स हैं। यदि k कोई संख्या है तो यह सही नहीं है कि $|kA| = k|A|$

वर्णन में सुविधा की दृष्टि से, मान लीजिए, A तीन कोटि का एक वर्ग मैट्रिक्स है और $k=2$ है, तो यह प्रमेय कि—

$$`|A+B| = |A| + |B|'$$

प्रत्यक्ष रूप से गलत है (देखिए प्रथम अध्याय का प्रमेय 6) और इसलिए $|2A| \neq 2|A|$ यही बात का आसानी से पता लगाया जा सकता है। मान लीजिए,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

जिसके फलस्वरूप,

$$2A \quad \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{(परिभाषा 8 से),}$$

अतएव, $\qquad |2A| = 2^3|A|$

यही बात तब भी स्पष्ट हो जाती है यदि हम §10.1 को मैट्रिक्स गुणनफल $2I \times A$ पर लागू करें, जहाँ 2I वास्तव में तीन कोटि के तत्समकारी मैट्रिक्स (unit matrix) का दोगुना है और इसलिए,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{है।}$$

प्रश्नावली सात

(प्रश्न 1—4 मौखिक रूप से हल कीजिए)

1. मैट्रिक्स A+B ज्ञात कीजिए, जब,

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix};$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -4 \\ 5 & -5 \end{bmatrix},$

(iii) $A = [1 \quad 2 \quad 3], \qquad B = [4 \quad 5 \quad 6],$

उत्तर—(i) $\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 6 & -6 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}$, (iii) $[5 \quad 7 \quad 9]$.

2. क्या मैट्रिक्स A+B की परिभाषा तब संभव है जब—

(i) A में 3 पंक्तियाँ और B में 4 पंक्तियाँ हों;

(ii) A में 3 स्तंभ और B में 4 स्तंभ हों;

(iii) A में 3 पंक्तियाँ और B में 3 स्तंभ हों ?

उत्तर—(i), (ii), नहीं; (iii) केवल तभी जब A में 3 स्तंभ और B में 3 पंक्तियाँ हों।

3. क्या मैट्रिक्स BA और मैट्रिक्स AB की परिभाषा तब संभव है जब AB में प्रश्न 2 वाले गुणधर्म हों ?

उत्तर— AB (i) यदि A में 4 स्तंभ हों;

(ii) यदि B में 3 पंक्तियाँ हों;

(iii) A में स्तंभों की संख्या पर और B में पंक्तियों की संख्या पर निर्भर है।

BA (i) यदि B में 3 स्तंभ हैं;

(ii) यदि A में 4 पंक्तियाँ हैं;

(iii) सदैव।

4. AB और BA गुणनफलों को ज्ञात कीजिए जब—

(i) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$; (ii) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}4 & 5\\5 & 6\end{bmatrix}$

प्रश्न 5—8 में क्वार्टनियनों (quaternions) की चर्चा उनके मैट्रिक्स रूपों में की गई है।

5. यदि ι, $\sqrt{(-1)}$ को प्रकट करता है और I, i, j, k क्रमशः इस प्रकार हैं—

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \quad i=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \tau\iota\end{bmatrix}, \quad j=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}, \quad k=\begin{bmatrix}0 & \iota\\\iota & 0\end{bmatrix}$$

तो, $ij=k$, $jk=i$, $ki=j$, $ji=-k$, $kj=-i$, $ik=-j$ और, $i^2=j^2=k^2=-I$

6. यदि a, b, c, d, वास्तविक या संमिश्र संख्याएँ हैं और यदि

$$Q=aI+bi+cj+dk,$$
$$Q'=aI-bi-cj-dk' \text{ तो,}$$
$$QQ'=(a^2+b^2+c^2+d^2)\ I.$$

7. यदि α, β, r, δ, वास्तविक या संमिश्र संख्याएँ हैं और यदि

$$P=\alpha I+\beta i+\gamma j+\delta k, \quad P'=\alpha I-\beta i-\gamma j-\delta k, \quad \text{तो,}$$

$$QPP'Q'=Q.(\alpha^2+\beta^2+r^2+\delta^2)\ I.\ Q'$$
$$=QQ'.\ (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)\ I \qquad \text{(देखिए §7)}$$
$$=(a^2+b^2+c^2+d^2)I.\ (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)\ I$$
$$=(a^2+b^2+c^2+d^2)\ (\alpha^2+\beta^2+\lambda^2+\delta^2)I$$
$$=Q'P'PQ.$$

8. प्रश्न 5 में दिए गए परिणामों को तब भी सिद्ध कीजिए जब I, i, j, k क्रमशः यों है—

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

9. निम्नलिखित दो मैट्रिक्सों को देखिए—

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad L=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

इनसे दो अन्य मैट्रिक्स $aI+b\iota$ और $aI-b\iota$ प्राप्त कीजिए, जहाँ a, b **वास्तविक** (real) संख्याएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि एक सामान्य संमिश्र संख्या पर उन मैट्रिक्सों के योग की तरह विचार किया जा सकता है जिनके अवयव वास्तविक संख्याएँ हों। विशेष रूप से सिद्ध कीजिए कि,

$$(aI+b\iota)(aI-b\iota)=(a^2+b^2)I,$$
$$(aI+b\iota)(cI+d\iota)=(ac-bd)I+(ab+bc)\iota$$

10. सिद्ध कीजिए,

$$[x\ y\ z]\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=[ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy],$$

अर्थात् एक सामान्य द्विघाती समघात ऐसे मैट्रिक्स के रूप में जिसमें केवल एक पंक्ति और एक स्तंभ है।

11. सिद्ध कीजिए कि मैट्रिक्स समीकरण $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ केवल तभी सत्य होगा जब $AB=BA$, और यह कि सामान्यरूपेण, $aA^2+2hAB+bB^2$ को, a, h, b संख्याओं के व्यापक मानों के लिए, एकघाती खंडों के (linear factors) गुणनफल के रूप में तब तक नहीं लिखा जा सकता जब तक कि— $AB=BA$ नही होता।

12. यदि λ_1, λ_2 वास्तविक या संमिश्र संख्याएँ हैं और A, nकोटि का एक वर्ग मैट्रिक्स है, तो, $A^2-(\lambda_1+\lambda_2)\ A+\lambda_1\lambda_2 1=1\ (A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)$, जहाँ I, n कोटि का तत्समकारो मैट्रिक्स (unit matrix) है।

(संकेत—दायाँ पक्ष, बंटन-नियम से, $A^2-\lambda_2AI-\lambda_1IA+\lambda_1\lambda_2I^2$ है ।)

13. यदि $f(\lambda)\equiv p_0\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\ldots+p_n$, जहाँ p_r, λ संख्याएँ हैं और यदि $f(A)$, मैट्रिक्स $p_0A^n+p_1A^{n-1}+\ldots+p_n$ को प्रकट करता है तो, $f(A)=p_0(A-\lambda_1I)\ldots(A-\lambda_nI)$,
जहाँ $\lambda_1, \ldots\lambda_n$ आदि समीकरण $f(\lambda)=0$ के मूल (roots) हैं ।

14. यदि $B=\lambda A+\mu I$, जहाँ λ और μ संख्याएँ हैं तो, $BA=AB$.
उप-मैट्रिक्सों (sub-matrices) के उपयोग सहित—

15. मैट्रिक्स
$$P\equiv\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{bmatrix}$$
को $\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}$ से प्रकट किया जा सकता है जहाँ P_{11} प्रकट करता है $\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}$ को, P_{12} प्रकट करता है $\begin{bmatrix} p_{13}\\ p_{23}\end{bmatrix}$ को, P_{21} प्रकट करता है $[p_{31}\ \ p_{32}]$ को, P_{22} प्रकट करता है $[p_{33}]$ को ।

यदि Q, Q_{11} आदि से इसी प्रकार के उन मैट्रिक्सों का हवाला दिया जाए जिनमें p_{ik} के बदले q_{ik} है तो सिद्ध कीजिए,

$$P+Q=\begin{bmatrix} P_{11}+Q_{11} & P_{12}+Q_{12}\\ P_{21}+Q_{21} & P_{22}+Q_{22}\end{bmatrix},$$

$$PQ=\begin{bmatrix} P_{11}Q_{11}+P_{12}Q_{21} & P_{11}Q_{12}+P_{12}Q_{22}\\ p_{21}Q_{11}+P_{22}Q_{21} & P_{21}Q_{12}+P_{22}Q_{22}\end{bmatrix}$$

टिप्पणी— PQ का पहला 'स्तंभ' इस रूप में गुणनफल PQ के पहले दो स्तंभों का एक संक्षिप्त रूप है, जब वह सीधे $[p_{ik}]\times[q_{ik}]$ से प्राप्त किया जाए ।

16. प्रश्न 5 में 1 और ι के स्थान पर, प्रश्न 9 में दिए गए दो पंक्ति के मैट्रिक्सों को रखकर, प्रश्न 8 को सिद्ध कीजिए ।

17. यदि P_{rs} और Q_{rs} में से प्रत्येक दो पंक्तियों और दो स्तंभों का एक मैट्रिक्स है तो सिद्ध कीजिए कि जब. $r=1, 2, 3,\quad s=1, 2, 3,$ तो,

$$[P_{rs}]\times[Q_{rs}]=\left[\sum_{k=1}^{3} P_{rk}\,Q_{ks}\right].$$

किसी मैट्रिक्स के प्रारंभिक रूपांतरण (Elementary transformations of a matrix)

18. I_{ij} वह मैट्रिक्स है जो तत्समकारी मैट्रिक्स I की, i-वीं और j-वीं पंक्तियों के विनिमय से प्राप्त होता है। सिद्ध कीजिए कि एक वर्ग मैट्रिक्स A का I_{ij} से पूर्व-गुणन का परिणाम यह होता है कि A में दो पंक्तियों का विनिमय हो जाता है। इसी प्रकार, I_{ij} से उत्तर-गुणन के परिणामस्वरूप, A में दो स्तंभों का विनिमय हो जाता है।

निगमन (deduction) से, यह भी सिद्ध कीजिए कि,

$$I_{ij}^2=I,\ I_{ik}\ I_{kj}\ I_{ji}=I_{kj}$$

19. यदि $H=I+[h_{ij}]$, अर्थात् तत्समकारी मैट्रिक्स में सूचित स्थिति का एक अवयव h जोड़कर बनाया गया व्यंजक हो तो HA का A में प्रभाव यह होता है कि पंक्ति i के स्थान पर पंक्ति i+h पंक्ति j आ जाती है। इसी प्रकार AH का A में प्रभाव यह होता है कि स्तंभ j के स्थान पर स्तंभ j+h स्तंभ i प्राप्त होता है।

20. यदि H, n कोटि का ऐसा मैट्रिक्स है जो तत्समकारी मैट्रिक्स के मुख्य विकर्ण में r-वें एक के बदले k रखने से प्राप्त होता है तो HA वास्तव में, A की r-वीं पंक्ति को k से गुणा कर देने के परिणाम के समान है और AH, इसी प्रकार, उस परिणाम की तरह है जो A के r-वें स्तंभ को k से गुणा कर देने पर आता।

मैट्रिक्स गुणन पर प्रश्न

21. सिद्ध कीजिए कि दो मैट्रिक्सों

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \cos\phi\sin\phi \\ \cos\phi\sin\phi & \sin^2\phi \end{bmatrix}$$

का गुणनफल शून्य होता है यदि θ और φ का अंतर, $\frac{1}{2}\pi$ का कोई विषम गुणज (odd multiple) हो।

22. यदि $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ और (μ_1, μ_2, μ_3) दो रेखाओं, l और m की दिक्कोज्याएँ (direction cosines) हों तो सिद्ध कीजिए कि गुणनफल,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_3 & \lambda_2\lambda_3 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mu_1^2 & \mu_1\mu_2 & \mu_1\mu_3 \\ \mu_1\mu_2 & \mu_2^2 & \mu_2\mu_3 \\ \mu_1\mu_3 & \mu_2\mu_3 & \mu_3 \end{bmatrix}$$

शून्य तब और केवल तभी होगा जब l और m रेखाएँ लम्ब होंगी।

23. यदि L प्रश्न 22 के प्रथम मैट्रिक्स को प्रकट करता है तो सिद्ध कीजिए

$$L^2=L.$$

अध्याय 7

संबंधित मैट्रिक्स (RELATED MATRICS)

1. किसी मैट्रिक्स का परिवर्त (The Transpose of a Matrix)

1.1. परिभाषा 13— A यदि n स्तभों का कोई मैट्रिक्स है तो उस मैट्रिक्स को A का परिवर्त (या A का परिवर्त-मैट्रिक्स) कहते हैं, जिसमें A का rवाँ स्तंभ r=1, 2, . ., n होने पर r-वीं पंक्ति के रूप में आता है। इसको A′ से प्रकट करते हैं।

यदि A=A′ हो तो A को समभित (symmetrical) कहा जाता है।

यह परिभाषा सभी आयताकार मैट्रिक्सों (rectangular matrices) पर लागू होती है। उदाहरण के लिए—

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix} \text{ और } \begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\2 & 4 & 6\end{bmatrix} \text{ परस्पर एक दूसरे}$$

के परिवर्त हैं क्योंकि एक की पंक्तियाँ दूसरे के स्तंभ हैं।

इस अध्याय में, n कोटि के वर्ग मैट्रिक्सों पर विचार करते समय हम मैट्रिक्स को, उसके उस अवयव से प्रकट करेंगे जो उसकी iवीं पंक्ति और kवें स्तंभ में हो। इस संकेतन में, यदि $A=[a_{ik}]$, तो $A'=[a_{ki}]$; क्योंकि, A′ में iवीं पंक्ति और k-वें स्तंभ में वही अवयव है जो A की kवीं पंक्ति और iवें स्तंभ में हैं।

1.2. प्रमेय, 23—परिवर्त के लिए उत्क्रमता का नियम (Law of Reversal for a Transpose)—A और B, यदि n कोटि के वर्ग मैट्रिक्स हैं तो,

$$(AB)'=B'A';$$

अर्थात्, गुणनफल AB का परिवर्त, उत्क्रम में परिवर्तों के गुणनफल के बराबर होता है।

§ 1.1. में बताए गए संकेतन में, मान लीजिए,

$$A=[a_{ik}], \qquad B=[b_{ik}],$$

जिससे,
$$A'=[a_{ki}], \qquad B^{1}=[b_{ki}]$$

अब, एक मैट्रिक्स को उसके iवीं पंक्ति और kवें स्तंभ वाले अवयव से प्रकट करने पर, और संकलन की परिपाटी के अनुसरण पर,

$$AB=[a_{ij}\, b_{jk}], \quad (AB)'=[a_{kj}\, b_{ji}]$$

अब, B′ की iवीं पंक्ति $b_{1i}, b_{2i}, \ldots, b_{ni}$ और A′ का kवाँ स्तंभ $a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}$ है—इन दोनों का आंतरिक गुणनफल (inner product) यों है—

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ji}\, a_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, b_{ji}\,.$$

अतएव, यदि हम संकलन की परिपाटी पर पुनः आएँ तो B′ और A′ का गुणनफल इस प्रकार दिया जा सकता है—

$$B'\, A' = [b_{ji}\, a_{kj}] = [a_{kj}\, b_{ji}]$$
$$= (AB)'.$$

उपप्रमेय— A, B,...,K यदि n कोटि के वर्ग मैट्रिक्स हैं, तो गुणनफल AB...K का परिवर्त, गुणनफल K′...B′A′ होता है ।

प्रमेय के अनुसार,

$$(ABC)' = C'\,(AB)'$$
$$= C'B'A'$$

और इसलिए, क्रम से यही बात मैट्रिक्सों की किसी भी संख्या के लिए सिद्ध की जा सकती है ।

2. क्रोनेकर डेल्टा (The Kronecker delta)

प्रतीक δ_{ik} की परिभाषा निम्नलिखित समीकरणों से दी जाती है—

$$\delta_{ik} = 0 \quad \text{जब} \quad i \neq k,$$
$$\delta_{ik} = 1 \quad \text{जब} \quad i = k.$$

उन अनेक प्रतीकों में से यह एक ऐसा विशेष उदाहरण है जिनका टेन्सर-कैलकुलस (Tensor Calculus) में बहुत प्रयोग होता है । मैट्रिक्स बीजगणित में तत्समकारी मैट्रिक्स को $[\delta_{ik}]$ से प्रकट करना प्रायः सुविधापूर्ण होता है जिसमें अग्रग विकर्ण के स्थानों में, अर्थात् जब $i=k$ होता है, 1 और अन्य सब स्थानों में शून्य होता है ।

3. सहखंडज मैट्रिक्स और व्युत्क्रम मैट्रिक्स (The adjoint matrix and the reciprocal matrix)

3.1. रूपांतरण (Transformations)—सही परिभाषा की ओर मार्ग-दर्शन के लिए—

मान लीजिए, X और x 'संख्याएँ' समीकरण—

$$X = Ax, \tag{1}$$

द्वारा संबद्ध हैं जहाँ A, मैट्रिक्स $[a_{ik}]$ को प्रकट करता है ।

यदि $\triangle = |a_{ik}| \neq 0$ तो x को केवल X के पदों में ही अद्वितीय रूप से व्यक्त किया जा सकता है, (देखिए, अध्याय II, § 4.3) क्योंकि जब हम प्रत्येक समीकरण

$$X_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \tag{1a}$$

को सहखंड (co-factor) A_{it} से गुणा करते हैं और $i=1, 2, \ldots, n$ के मानों के लिए जोड़ते हैं, तो हमें निम्नलिखित प्राप्त होते हैं—

$$\sum_{i=1}^{n} A_{it}X_i = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{it}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k \, \delta_{kt} \, \triangle. \qquad \text{(प्रमेय 10)}$$

$$= x_t \, \triangle$$

अर्थात्, $x_t = \sum_{i=1} (A_{it}/\triangle)X_i$

या, $$x_i = \sum_{k=1}^{n} (A_{ki}/\triangle)X_k \qquad (2a)$$

इस तरह हम समीकरणों (2a) को

$$x = A^{-1} X, \qquad (2)$$

के प्रतीकात्मक रूप में लिख सकते हैं, जो (1) का पूरक (complement) है बशर्ते A^{-1} का तात्पर्य मैट्रिक्स $[A_{ki}/\triangle]$ से हो ।

3.2. **औपचारिक परिभाषाएँ**—मान लीजिए $A = [a_{ik}]$, n कोटि का एक वर्ग-मैट्रिक्स है, यह भी मान लीजिए कि $\triangle$, या $|A|$, डिटर्मिनेंट $|a_{ik}|$ को; और A_{rs}, $\triangle$ में a_{rs} के सहखण्ड को प्रकट करता है ।

परिभाषा 14— **$A=[a_{ik}]$ को एक (अव्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स) कहा जाता है यदि $\triangle=0$ हो; इसको (व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स) कहते हैं यदि $\triangle \neq 0$ हो ।**

परिभाषा 15–**मैट्रिक्स $[A_{ki}]$ को, मैट्रिक्स $[a_{ik}]$ का (सहखंडज मैट्रिक्स) कहा जाता है ।**

परिभाषा 16—**जब $[a_{ik}]$ एक व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स हो तो मैट्रिक्स $[A_{ki}/\triangle]$, $[a_{ik}]$ का व्युत्क्रम मैट्रिक्स होता है ।**

यह ध्यान देने योग्य है कि अंतिम दो परिभाषाओं में, A_{ik} न होकर A_{ki} है जो कि मैट्रिक्स की i-वीं पंक्ति और k-वें स्तंभ में होता है ।

3.3. **व्युत्क्रम मैट्रिक्स के गुणधर्म**—'व्युत्क्रम मैट्रिक्स' कहे जाने का कारण, प्रमेय 24 और 25 में बताए गए गुणधर्मों से, पता लग सकता है ।

प्रमेय 24—**$[a_{ik}]$ यदि n कोटि का कोई व्युत्क्रमणीय वर्ग मैट्रिक्स है और A_{rs}, यदि $\triangle=|a_{ik}|$, में a_{rs} का सहखण्ड है, तो**

$$[a_{ik}] \times [A_{ki}/\triangle] = I, \qquad (1)$$

श्रौर $$[A_{ki}/\triangle] \times [a_{ik}] = I, \qquad (2)$$
जहाँ I, n कोटि का तत्समकारी मैट्रिक्स है ।

गुणनफल $[a_{ik}] \times [A_{ki}/\triangle]$ में i-वीं पंक्ति श्रौर k-वें स्तंभ में श्रवयव यों हैं—

$$\frac{1}{\triangle} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj}$$

जो कि द्वितीय श्रध्याय के प्रमेय 10 के श्रनुसार† शून्य होता है जब $i \neq k$ हो श्रौर एक होता है जब $i=k$ हो । श्रतएव, गुणनफल है $[\delta_{ik}] = I$. इसलिए (1) सिद्ध कर दिया गया है ।

इसी प्रकार, संकलन या योग की परिपाटी का उपयोग करने पर हम देखते हैं कि

$$[A_{ki}/\triangle]\times[a_{ik}]=[A_{ji}\ a_{jk}/\triangle]$$
$$=[\delta_{ik}],$$

श्रौर इसलिए (2) भी सिद्ध हो चुका है ।

3.4. प्रमेय 24 की सहायता से यह कहना युक्ति संगत है कि जब A, $[a_{ik}]$ को प्रकट करता है तो,

$$[A_{ki}/\triangle]=A^{-1}\ ;$$

क्योंकि प्रमेय 24 के (1) श्रौर (2) की सहायता से यह दिखाया जा चुका है कि इस संकेतन में, $AA^{-1}=I$ और $A^{-1}A=I.$

श्रर्थात् एक मैट्रिक्स को यदि उसके व्युत्क्रम से गुणा किया जाए तो परिणाम एक (तत्समकारी मैट्रिक्स) होता है ।

लेकिन, यद्यपि हम यह बता चुके है कि A^{-1}, A का **एक** व्युत्क्रम है हमने श्रभी तक यह सिद्ध नहीं किया है कि वह व्युत्क्रम **अकेला** ही होता है । प्रमेय 25 में इस पर विचार करेंगे ।

प्रमेय 25—यदि A कोई व्युत्क्रमणीय वर्ग मैट्रिक्स है तो केवल एक ही मैट्रिक्स ऐसा होता है जिसको यदि A से गुणा किया जाए तो परिणाम तत्समकारी मैट्रिक्स हो ।

मान लीजिए, R ऐसा कोई भी मैट्रिक्स इस प्रकार का है कि $AR=I$ श्रौर यह भी मान लीजिए कि A^{-1}, मैट्रिक्स $[A_{ki}/\triangle]$ को प्रकट करता है । तो, प्रमेय 24 से, $AA^{-1}=I$ श्रौर इसलिए $A(R-A^{-1})=AR-AA^{-1}=I-I=0$

इससे यह स्पष्ट है कि (श्रगले दो पगों पर ध्यान दीजिए)—

$A^{-1}A(R-A^{-1})=A^{-1}.0=0$ (छठा श्रध्याय, § 6.5),

श्रर्थात् [(प्रमेय 24 के (2) से],

$I(R-A^{-1})=0$, श्रर्थात् $R-A^{-1}=0$ (छठा श्रध्याय, §7.1) श्रतएव यदि $AR=I$, तो R श्रवश्य ही A^{-1} होगा,

---

†यहाँ उपयोग किए गए रूप के लिए छठी प्रश्नावली के प्रश्न 6 से तुलना कीजिए ।

इसी प्रकार, यदि $RA=I$, तो

$$(R-A^{-1})A=RA-A^{-1}A=I-I=0,$$

और इसलिए, $(R-A^{-1})\ AA^{-1}=0.\ A^{-1}=0$;
अर्थात् $(R-A^{-1})\ I=0$, अर्थात् $R-A^{-1}=0$. अतः यदि $RA=I$, है तो R अवश्य ही A^{-1} होगा ।

3.5. प्रमेय 25 की बदौलत हमारा ऐसा कहना गलत न होगा कि A^{-1} न केवल A का **एक** व्युत्क्रम है, बल्कि यह कि A का **वही एक** व्युत्क्रम है ।

इसके अतिरिक्त, A के व्युत्क्रम का व्युत्क्रम स्वयं A ही होगा, अर्थात्,

$$(A^{-1})^{-1}=A$$

क्योंकि प्रमेय 24 से, $AA^{-1}=A^{-1}A=I$, यह स्पष्ट हो जाता है कि A, A^{-1} का **एक** व्युत्क्रम है और प्रमेय 25 से, A^{-1} का (**वही एक**) व्युत्क्रम है ।

4. मैट्रिक्सों के लिए घातांक नियम (The index law for matrices)

हम $A^2, A^3, \ldots$ आदि संकेतनों को $AA, AAA, \ldots$ आदि के लिए प्रयोग कर चुके हैं । जब r और s धन पूर्णांक (Positive integers) हों तो इस संकेतन में यह अंतर्निहित है कि—

$$A^r \times A^s = A^{r+s}$$

जब, A^{-1}, A का व्युत्क्रम हो और s एक धन पूर्णांक हो, तो हम संकेतन A^{-s} का प्रयोग $(A_{-1})^s$ को प्रकट करने के लिए करते हैं । इस संकेतन में हम

$$A^r \times A^s = A^{r+s}. \qquad (1)$$

लिख सकते हैं जब भी r, s धन या ऋण पूर्णांक हों बशर्ते कि A° का मतलब I से हो ।

हम प्रत्येक स्थिति में (1) को सिद्ध नही करेंगे; (1) की एक ऐसी उपपत्ति ही रीति को समझा देने के लिए पर्याप्त होगी जब $r>0$, $s=-t$, और $t>r>0$ हो ।

मान लीजिए, $t=r+k$, जहाँ $k>0$, तो

$$A^r A^{-t} = A^r\ A^{-r-k} = A^r A^{-r} A^{-k}$$

लेकिन, $AA^{-1}=I$ (प्रमेय 24), और जब, $r>I$,

$$A^r A^{-r} = A^{r-1}\ AA^{-1}\ A^{-r+1} = A^{r-1} I\ A^{-r+1} = A^{r-1}\ A^{-r+1},$$

जिससे, $$A^r A^{-r} = A^1 A^{-1} = I.$$

अतएव $$A^r A^{-t} = I\ A^{-k} = A^{-k} = A^{r-t}.$$

इसी प्रकार, हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि,

$$(A^r)^s = A^{rs} \qquad (2)$$

जब भी r और s धन या ऋण पूर्णांक हों ।

5. व्युत्क्रमों के लिए उत्क्रमता का नियम (The law of reversal for reciprocals)

प्रमेय 26—**कुछ खंडों के गुणनफल का व्युत्क्रम, उल्टे क्रम में उन खंडों के व्युत्क्रम का गुणनफल होता है; विशिष्ट रूप से,**

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1},$$
$$(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1},$$
$$(A^{-1}B^{-1})^{-1} = B\ A.$$

उपपत्ति—दो खंडों के गुणनफल के लिए, हमारे पास,

$$(B^{-1}A^{-1}) . (AB) = B^{-1} A^{-1} A\ B \qquad \text{(छठा अध्याय, §6.5)}$$
$$= B^{-1}\ I\ B$$
$$= B^{-1}\ B = I \qquad \text{(वही अध्याय, §7.1).}$$

अतएव, $B^{-1}\ A^{-1}$, AB का एक व्युत्क्रम है और, प्रमेय 25 से, AB का (**वही एक**) व्युत्क्रम है।

तीन खंडों के गुणनफल के लिए, हमारे पास,

$$(C^{-1}\ B^{-1}\ A^{-1}) (ABC) = C^{-1}\ I\ C$$
$$= C^{-1}\ C = I,$$

यही तरीका खंडों की किसी भी संख्या के लिए अपनाया जा सकता है।

प्रमेय 27—**व्युत्क्रम की और परिवर्तन की संक्रियाएँ परस्पर क्रमविनिमय वाली होती हैं;** अर्थात्

$$(A')^{-1}=(A^{-1})'$$

उपपत्ति—परिभाषा से, मैट्रिक्स A^{-1} यों है—

$$[A_{ki}/\triangle],$$

फलस्वरूप, $(A^{-1})'=[A_{ik}/\triangle]$

इसके अतिरिक्त, $A'=[a_{ki}]$

और इसलिए, गुणनफल की परिभाषा से और प्रमेय 10 में दिए गए परिणामों से,

$$A'.(A^{-1})'=[\delta_{ki}]=I.$$

अतएव, $(A^{-1})'$, A' का एक व्युत्क्रम है और, प्रमेय 25 से, (**वही एक**) व्युत्क्रम है।

6. अव्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स (Singular matrices)

यदि A कोई अव्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स है तो उसका डिटर्मिनेंट शून्य होता है और इसलिए A का व्युत्क्रम नहीं बनाया जा सकता यद्यपि उसका सहखंडज मैट्रिक्स बनाया जा सकता है। इसके अतिरिक्त,

प्रमेय 28—**किसी अव्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स का उसके सहखंडज से गुणनफल शून्य मैट्रिक्स होता है।**

उपपत्ति—यदि $A=[a_{ik}]$ और $|a_{ik}|=0$, तो,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj}=0, \quad \sum_{j=1}^{n} A_{ji} a_{kj} = 0$$

दोनों ही बार जब $i \neq k$ और जब $i=k$ हो। इसलिए गुणनफल,

$$[a_{ik}] \times [A_{ki}] \text{ और } [A_{ki}] \times [a_{ik}]$$

दोनों शून्य मैट्रिक्स हैं।

7. व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्सों के लिए भाजन नियम (The division law for non-singular matrices)

7.1. प्रमेय 29—(i) **यदि मैट्रिक्स A, व्युत्क्रमणीय है तो समीकरण $AB=0$ में यह निहित है कि $B=0$.**

(ii) **यदि मैट्रिक B व्युत्क्रमणीय है, तो समीकरण $AB=0$ में यह निहित है कि $A=0$.**

उपपत्ति—(i) चूंकि मैट्रिक्स A व्युत्क्रमणीय है, उसका एक व्युत्क्रम A^{-1} है और $A^{-1}A=I$.

चूंकि $AB=0$, यह स्पष्ट हो जाता है कि,

$$A^{-1}AB=A^{-1}\times 0=0.$$

लेकिन $A^{-1}AB=IB=B$ और इसलिए, $B=0$.

(ii) चूंकि B व्युत्क्रमणीय है, उसका एक व्युत्क्रम B^{-1} है और $BB^{-1}=I$.

चूंकि $AB=0$ यह स्पष्ट है कि,

$$AB\,B^{-1}=0\times B^{-1}=0.$$

लेकिन $ABB^{-1}=AI=A$, और इसलिए $A=0$

7.2. मैट्रिक्सों के लिए भाजन नियम इस प्रकार निम्नलिखित रूप में कहा जा सकता है,

'यदि $AB=0$, तो या तो $A=0$, या $B=0$, और या A और B दोनों अव्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स हैं।'

7.3. प्रमेय 30—**यदि A कोई मैट्रिक्स है और B एक व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स है (और दोनों n कोटि के वर्गमैट्रिक्स हैं) तो एक और केवल एक मैट्रिक्स X ऐसा होगा कि, $A=BX$,** (1)

तथा एक और केवल एक मैट्रिक्स Y ऐसा होगा कि $A=YB$. (2)

इसके अतिरिक्त, $X=B^{-1}A$, $Y=AB^{-1}$.

उपपत्ति—यह स्पष्ट है कि $X=B^{-1}A$, (1) को संतुष्ट करता है; क्योंकि
$BB^{-1}A=IA=A$. इसके अतिरिक्त यदि $A=BR$, तो

$$0=BR-A=B\ (R-B^{-1}A),$$

और $0=B^{-1}B\ (R-B^{-1}\ A)$

$$0=I\ (R-B^{-1}\ A),$$

जिसके फलस्वरूप, $R-B^{-1}\ A$ शून्य मैट्रिक्स है।

इसी प्रकार, $Y=AB^{-1}$ ही केवल ऐसा मैट्रिक्स है जो (2) को संतुष्ट करता है।

7.4. यह प्रमेय कुछ ऐसी परिस्थितियों में भी सही होता है जबकि A और B दोनों एक ही कोटि के वर्ग मैट्रिक्स न हों।

उपप्रमेय—**A, यदि m पंक्तियों और n स्तंभों का कोई मैट्रिक्स और B यदि m कोटि का कोई व्युत्क्रमणीय वर्गमैट्रिक्स है तो,** $X=B^{-1}\ A$,

$$A=BX$$

का अद्वितीय साधन होता है।

A, यदि m पंक्तियों और n स्तंभों का कोई मैट्रिक्स और C, यदि n कोटि का कोई व्युत्क्रमणीय वर्ग मैट्रिक्स है तो, $Y=AC^{-1}$,

$$A=YC$$

का अद्वितीय साधन होता है।

क्योंकि, B^{-1} में m स्तंभ और A में m पंक्तियाँ हैं, B^{-1} और A, गुणनफल $B^{-1}\ A$ के लिए अनुकूलनीय होंगे जो m पंक्तियों और n स्तंभों का मैट्रिक्स है। साथ ही,

$$B.\ B^{-1}\ A=IA=A,$$

जहाँ I, m कोटि का तत्समकारी मैट्रिक्स है।

इसके अतिरिक्त, यदि $A=BR$ है तो R अवश्य ही m पंक्तियों और n स्तंभों का एक मैट्रिक्स होना चाहिए, और उपप्रमेय का पहला भाग उसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है जिस प्रकार हमने प्रमेय को सिद्ध किया है।

दूसरा भाग भी इसी तरीके से सिद्ध किया जा सकता है।

7.5. उपर्युक्त उपप्रमेय एकघाती समीकरणों के साधन में विशेष रूप से उपयोगी होता है। यदि $A=[a_{ik}]$, n कोटि का एक व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स है तो निम्नलिखित समीकरणों के समुच्चय

$$b_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ x_k\ (i=1,\ldots,n) \tag{3}$$

को $b=Ax$ के मैट्रिक्स रूप में लिखा जा सकता है जहाँ b, x एक-एक स्तंभ के मैट्रिक्सों को प्रकट करते हैं।

समीकरण

$$b_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}y_k\ (i=1,\ldots,n) \tag{4}$$

के समुच्चय को $b'=y'A$ के मैट्रिक्स रूप में लिखा जा सकता है जहाँ b' y' एक-एक पंक्ति के मैट्रिक्सों को प्रकट करते हैं।

समीकरणों के समुच्चयों के साधन यों हैं—

$$x=A^{-1}b, \qquad y'=b'A^{-1}.$$

इसका एक रोचक उपयोग अगली प्रश्नावली के प्रश्न 11 में मिलेगा।

प्रश्नावली आठ

1. जब, $A=\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$,

हो तो AB, BA, $A'B'$, $B'A'$ गुणनफलों को ज्ञात कीजिए और सातवें अध्याय के प्रमेय 23 में प्रस्तुत निष्कर्षों की जाँच कीजिए।

सुझाव—$X=ax+hy+gz$, $Y=hx+by+fz$, $Z=gx+fy+cz$ का प्रयोग कीजिए।

2. यदि A, B दोनों 2 कोटि के वर्गमैट्रिक्स हों और कोई भी सममित (symmetrical) न हो तो उपर्युक्त गुणनफलों को ज्ञात कीजिए।

3. जब A,B प्रश्न 1 वाले मैट्रिक्स हों तो A^{-1}, B^{-1} मैट्रिक्सों को बनाइए और मान ज्ञात करने के बाद, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ की जाँच कीजिए।

4. प्रमेय 23 की एक विशेष स्थिति में, जब $B=A^{-1}$ हो, प्रमेय 27 को सिद्ध कीजिए कि $(A')^{-1}=(A^{-1})'$।

5. सिद्ध कीजिए कि एक मैट्रिक्स का उसके परिवर्त से गुणनफल, एक सममित मैट्रिक्स होता है।

सुझाव—प्रमेय 23 का उपयोग कीजिए और मैट्रिक्स AA' के परिवर्त पर विचार कीजिए।

6. सिद्ध कीजिए कि मैट्रिक्स $[a_{ik}]$ का उसके सहखंडज (adjoint) से गुणनफल, $|a_{ik}|\,I$ होता है।

उपमैट्रिक्सों के उपयोग पर (छठे अध्याय के प्रश्न 15 से तुलना कीजिए)

7. मान लीजिए, $L=\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $M=\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $N=\begin{bmatrix} \nu \end{bmatrix}$,

जहाँ λ, μ, ν अ-शून्य (non-zero) संख्याएँ हैं, और यह भी मान लीजिए कि,

$$A=\begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix}.$$

तो सिद्ध कीजिए कि,

$$A^2 = \begin{bmatrix} L^2 & 0 & 0 \\ 0 & M^2 & 0 \\ 0 & 0 & N^2 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} L^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & N^{-1} \end{bmatrix}.$$

सुझाव—प्रमेय 25 को ध्यान में रखते हुए अंतिम भाग इस प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि A और अंतिम मैट्रिक्स का गुणनफल I होता है।

8. सिद्ध कीजिए कि यदि $f(A)=p_0A^n+p_1A^{n-1}+\ldots+p_n$, जहाँ $p_0,\cdots,p_n$ संख्याएँ हैं तो f (A) को मैट्रिक्स

$$\begin{bmatrix} f(L) & 0 & 0 \\ 0 & f(M) & 0 \\ 0 & 0 & f(N) \end{bmatrix},$$

के रूप में भी लिखा जा सकता है, और यह कि जब f(A) व्युत्क्रमणीय हो तो, $\{f(A)\}^{-1}$ या $1/f(A)$ भी उसी प्रकार के मैट्रिक्स के रूप में लिखा जा सकता है, अंतर केवल यह होगा कि इस समय f(L), f(M), f(N) के स्थान पर क्रमशः $1/f(L)$, $1/f(M)$, $1/f(N)$ होंगे।

9. f(A), g(A) यदि A में दो बहुपद हों और यदि g(A) व्युत्क्रमणीय हो तो प्रश्न 8 को ही उस विस्तरित रूप में सिद्ध कीजिए जब f के बदले f/g हो।

विविध अभ्यास

10. §7.5 में दिए गए समीकरणों को निम्नलिखित रूपों में सिद्ध कीजिए,

$$y=(A')^{-1}b, \quad y'=b'A^{-1}$$

और फिर प्रमेय 23 के उपयोग से सिद्ध कीजिए कि

$$(A')^{-1}=(A^{-1})'$$

11. A यदि, n कोटि का कोई व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स है, x और y, n पंक्तियों के दो एक-स्तंभीय (single-column) मैट्रिक्स हैं, l′ और m′, n स्तंभों के दो एक-पंक्तीय (single-row) मैट्रिक्स हैं;

$$y=Ax, \quad l'x=m'y.$$

सिद्ध कीजिए कि $m'=l'A^{-1}$, $m=(A^{-1})'l$.

इस निष्कर्ष का अर्थ तब स्पष्ट कीजिए जब कोई एकघातीय रूपांतरण (linear transformation) $y_i=\sum_{K=1}^{3} a_{ik}x_k$ $(i=1,2,3)$ से $l_1x_1+l_2x_2+l_3x_3$ का रूप

$m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3$ हो जाता है और (x_1,x_2,x_3), (y_1,y_2,y_3) का तात्पर्य एक समतल में समघाती बिन्दु-निर्देशांकों (point-coordinates) से हो ।

12. (सिद्ध कीजिए) यदि A के अवयव a_{ik} वास्तविक हों और यदि $AA'=0$ हो तो $A=0$.

13. A के अवयव a_{ik} संमिश्र हैं । $\bar{A}$ के अवयव $\bar{a}_{ik}$ के संयुग्मी संमिश्र (conjugate complexes) हैं और $A\bar{A}'=0$ सिद्ध कीजिए $A=\bar{A}=0$.

14. A और B एक ही कोटि के वर्ग मैट्रिक्स हैं; A सममित है । सिद्ध कीजिए कि $B'AB$ भी सममित है । (अध्याय 10 § 4.1 में इसकी एक उपपत्ति दी गई है ।)

अध्याय 8

किसी मैट्रिक्स का क्रम
(The Rank of a Matrix)

[परिच्छेद 6, अध्याय के शेष भाग से कुछ कम रोचक है । पहले पठन में इसको छोड़ा भी जा सकता है ।]

1. क्रम की परिभाषा

1.1. किसी मैट्रिक्स के उपसारणिक (minors)—मान लीजिए, हमारे पास कोई मैट्रिक्स A है चाहे वह वर्ग है चाहे नहीं। इस मैट्रिक्स में से उन सारे अवयवों को मिटा दीजिए जो कुछ विशेष r पंक्तियों और r स्तंभों में नहीं हैं। जब $r > 1$, तो शेष अवयवों से r कोटि का एक वर्ग मैट्रिक्स बनता है । इस मैट्रिक्स के डिटर्मिनेंट को A का r कोटि का उपसारणिक कहते हैं । इस संदर्भ में A के प्रत्येक अलग-अलग अवयव को, A का 1 कोटि का उपसारणिक कहते है । उदाहरण क लिए,

डिटर्मिनेंट $\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ का 2 कोटि का

एक उपसारणिक है; a, b,..आदि 1 कोटि के उपसारणिक हैं ।

1.2. अब, $r+1$ $(r \geqslant 1)$ कोटि के किसी उपसारणिक का उसकी प्रथम पंक्ति (प्रमेय 1) से प्रसार किया जा सकता है और इसलिए उसको r कोटि के उपसारणिकों के गुणजों (multiples) के योग के रूप में लिख सकते हैं। अतएव, यदि r कोटि का **प्रत्येक** उपसारणिक शून्य हो, तो $r+1$ कोटि का **भी** प्रत्येक उपसारणिक शून्य होगा।

इसका विलोम (converse) सत्य नहीं है; उदाहरण के लिए, §1.1 में, 3 कोटि का अकेला उपसारणिक वह डिटर्मिनेंट है जिसमें मैट्रिक्स वाले सारे अवयव हैं, और यह शून्य हो जाता है जब $a=b$, $d=e$, और $g=h$; लेकिन, 2 कोटि का उपसारणिक $ai-gc$ आवश्यक रूप से शून्य नहीं है।

1.3. क्रम (Rank)—यदि किसी मैट्रिक्स A का प्रत्येक ही अवयव शून्य नहीं है, तो उसी कोटि के उन उपसारणिकों का कम से कम एक समुच्चय (set) ऐसा होना चाहिए जो **सबके सब** ही शून्य नहीं होते।

उस मट्रिक्स के अलावा जिसमें प्रत्येक अवयव शून्य है, n पंक्तियों और m स्तंभों वाले प्रत्येक मैट्रिक्स के लिए, §1.2 के तर्कों से, एक निश्चित धन पूर्णांक ρ ऐसा होगा कि—

या तो ρ, m और n दोनों से कम है, ρ कोटि के सब उपसारणिक शून्य नहीं हैं; लेकिन $\rho+1$ कोटि के सब उपसारणिक शून्य हैं ;

या ρ, min (m, n)† के बराबर है, ρ कोटि के सब उपसारणिक शून्य नहीं हैं और $\rho+1$ कोटि का कोई भी उपसारणिक मैट्रिक्स में से नहीं बनाया जा सकता ।

इस संख्या ρ को ही मैट्रिक्स का **क्रम** कहते हैं। लेकिन इस परिभाषा को अधिक संक्षिप्त और सुसंबद्ध बनाया जा सकता है और अपना काम चलाने के लिए हम निम्नलिखित परिभाषा देंगे :

परिभाषा 17. **एक मैट्रिक्स का क्रम r कहा जाता है जब r ऐसा सबसे बड़ा पूर्णांक हो जिसके लिए यह कथन सही हो कि r कोटि के समस्त उपसारणिक शून्य नहीं हैं ।**

n कोटि के व्युत्क्रमणीय वर्ग मैट्रिक्स के लिए, क्रम n होता है; n कोटि के अव्युत्क्रमणीय वर्ग मैट्रिक्स के लिए, क्रम n से कम होता है ।

शून्य मैट्रिक्स (null matrix) को, जिसमें सारे ही अवयव शून्य होते है, शून्य क्रम (zero rank) का मान लेना कभी-कभी सुविधापूर्ण होता है ।

2. एकघात आश्रितता (Linear dependence)

2.1. इस अध्याय के शेष भाग में हम एकघात आश्रितता और इसकी विपरीत, एकघात स्वातंत्र्य (Linear independence) पर ही चर्चा करेंगें । विशेष रूप से, हम किसी मैट्रिक्स की एक पंक्ति को, कुछ अन्य पंक्तियों के गुणजों के योग के रूप में प्रकट कर सकने की संभावनाओं पर विचार करेंगे। इन शब्दों को पहले हम सूक्ष्म और निश्चित अर्थ देंगे।

छठे अध्याय वाले अर्थों में, मान लीजिए $a_1, \ldots, a_m$ ऐसी 'संख्याएँ' हैं जिनमें से प्रत्येक के n घटक (components) हैं जो वास्तविक या संमिश्र संख्याएँ हैं। मान लीजिए, वे घटक यों हैं—

$$(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ \ldots, \ (a_{m1}, \ldots, a_{mn}).$$

---

†जब $m=n$, $\min(m, n) = m = n$;
जब $m \neq n$, $\min(m, n)=m$ और n में से छोटा वाला ।

मान लीजिए, संख्याओं का कोई फील्ड† (field)F है. तो $a_1, \ldots, a_m$ को F के सापेक्ष एकघाततः आश्रित कहा जाता है यदि कोई समीकरण ऐसा हो कि—

$$l_1 a_1 + \ldots + l_m a_m = 0, \qquad (1)$$

जिसमें कि सारे l, F के सदस्य है और उनमें से सब ही शून्य नहीं हैं ।

समीकरण (1) से तात्पर्य इन n समीकरणों का है—

$$l_1 a_{1r} + \ldots + l_m a_{mr} = 0 \quad (r = 1, \ldots, n).$$

F के सापेक्ष एकघात आश्रितता का विपरीत F के सापेक्ष एकघात स्वातंत्र्य होता है ।

'संख्या' a_1 को F के सापेक्ष $a_2, \ldots, a_m$ **'संख्याओं'** के गुणजों का योग (SUM OF MULTIPLES) कहते हैं यदि

$$a_1 = l_2 a_2 + \ldots + l_m a_m, \qquad (2)$$

के रूप का कोई समीकरण ऐसा हो जहाँ कि सारे l, F के सदस्य हों । समीकरण(2) से तात्पर्य इन n समीकरणों से है—

$$a_{1r} = l_2 a_{2r} + \ldots + l_m a_{mr} \quad (r = 1, \ldots, n)$$

2.2. जब तक विपरीत कहा ही न गया हो तो F से हमारा तात्पर्य, वास्तविक या संमिश्र, समस्त संख्याओं के फील्ड से होगा । इसके अतिरिक्त, 'एकघाततः आश्रित', 'एकघाततः स्वतंत्र', 'गुणजों का एक योग है', आदि वाक्यांशों से तात्पर्य यह होगा कि प्रत्येक गुणधर्म, वास्तविक या संमिश्र, समस्त संख्याओं के फील्ड के सापेक्ष ही सत्य है। उदाहरण के लिए, **'संख्या** a, b और c **संख्याओं** के गुणजों का योग है' में $a = l_1 b + l_2 c$ के रूप के समीकरण का भाव निहित है जहाँ l_1 और l_2 के लिए यह जरूरी नहीं है कि वे पूर्णांक ही हों । वे वास्तविक या संमिश्र, कोई भी संख्याएँ हो सकती हैं ।

जैसा पहले कई बार हुआ है, हम **'संख्या'** शब्द को अनेक अर्थों में प्रयुक्त कर सकेंगे, उदाहरण के लिए आगे प्रमेय 31 में, हम एक मैट्रिक्स की प्रत्येक पंक्ति को **'संख्या'** ही कहेंगे ।

3. क्रम और एकघात आश्रितता

3.1· प्रमेय 31—**A यदि, r क्रम का कोई मैट्रिक्स है जहाँ r ⩾1, और यदि A में r से अधिक पंक्तियाँ हैं, तो हम A की r पंक्तियाँ चुन सकते हैं और किसी दूसरी पंक्तियों को इन r पंक्ति के गुणजों के योग के रूप में लिख सकते हैं ।**

मान लीजिए, A में m पंक्तियाँ और n स्तंभ हैं । तो दो संभावनाएँ ऐसी हैं जिन पर विचार किया जा सकता है :

†भाग एक के प्राथमिक नोट से तुलना कीजिए ।

या तो (i) $r=n$ और $m>n$.

या (ii) $r<n$ और, साथ ही, $r<m$.

(i) मान लीजिए, $r=n$ और $m>n$

n कोटि का, कम से कम एक अ-शून्य डिटर्मिनेंट ऐसा है जो A से बनाया जा सकता है। स्तंभों के लिए अक्षर और पंक्तियों के लिए अनुबंध लेकर, मान लीजिए, A के अवयव इस प्रकार द्योतित किए जाते हैं कि ऐसा एक अ-शून्य डिटर्मिनेंट निम्नलिखित से प्रकट किया जा सके—

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & . & . & k_1 \\ a_2 & b_2 & . & . & k_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & . & . & k_n \end{vmatrix}$$

इस नए नामकरण में, मान लीजिए, $n+\theta$ किसी और पंक्ति का अनुबंध है।

तो (अध्याय दो, §4.3) n समीकरणों,

$$\left.\begin{aligned} a_1l_1+a_2l_2+\cdots+a_nl_n&=a_{n+\theta}, \\ b_1l_1+b_2l_2+\cdots+b_nl_n&=b_{n+\theta}, \\ \cdots\cdots\cdots & \\ k_1l_1+k_2l_2+\cdots+k_nl_n&=k_{n+\theta} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

का $l_1, l_2, \ldots, l_n$ में एक अद्वितीय साधन होगा जो,

$$l_1=(a_{n+\theta}\, b_2\cdots k_n)/(a_1b_2\cdots k_n),$$

$$l_2=(a_1b_{n+\theta}c_3\cdots k_n)/(a_1b_2\cdots k_n),$$

से दिया जा सकता है इत्यादि, इत्यादि। अतः अनुबंध $n+\theta$ वाली पंक्ति† को, Δ में आने वाली A की n पंक्तियों के गुणजों के योग में व्यक्त किया जा सकता है। इससे प्रमेय तब सिद्ध हो जाता है जब $r=n<m$.

ध्यान दीजिए कि यह तर्क अब असफल हो जाता है जब $\Delta=0$ हो।

(ii) मान लीजिए, $r<n$ और, साथ ही, $r<m$,

r कोटि का कम से कम एक उपसारणिक ऐसा होगा जो अ-शून्य है। जैसा (i) में किया गया है, स्तंभों के लिए अक्षर और पंक्तियों के लिए अनुबंध लेकर, A के अवयवों को इस तरह द्योतित कीजिए कि r कोटि का इस प्रकार का एक अ-शून्य उपसारणिक यों प्रकट किया जा सके,

$$M=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & . & . & p_1 \\ a_2 & b_2 & . & . & p_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_r & b_r & . & . & p_r \end{vmatrix}$$

---

†यदि P_t उस पंक्ति के लिए प्रयोग करें जिसके अक्षरों में अनुबंध t है तो हम समीकरण (1) को यों लिख सकते हैं—

$$\rho_{n+\theta}=l_1\rho_1+l_2\rho_2+\cdots+l_n\rho_n.$$

इस नामकरण में, मान लीजिए कि A की शेष पंक्तियों के अनुबंध $r+1$, $r+2,\ldots,m$ हैं।

$$\text{डिटर्मिनेंट } D = \begin{vmatrix} a_1 & . & . & p_1 & \alpha_1 \\ . & . & . & . & . \\ a_r & . & . & p_r & \alpha_r \\ a_{r+\theta} & & . & p_{r+\theta} & \alpha_{r+\theta} \end{vmatrix}$$

पर विचार कीजिए जहाँ θ, 1 से $m-r$ तक का कोई भी पूर्णांक है और जहाँ, α, A के **किसी भी** स्तंभ का अक्षर है।

α यदि, $a,\ldots,p$, में से कोई अक्षर है, तो D के दो स्तंभ अभिन्न हो जाते हैं और इसलिए वह शून्य हो जाता है।

α यदि, $a,\ldots,p$, में से कोई अक्षर नहीं है तो $\pm D$, A का, $r+1$ कोटि का एक उपसारणिक है; और चूँकि A का क्रम r है, तो D फिर शून्य हो जाता है।

इसलिए, D शून्य है जब α, A के **किसी भी** स्तंभ का अक्षर है, और यदि हम D का उसके अंतिम स्तंभ से प्रसार करें, तो समीकरण

$$M\alpha_{r+\theta}+\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0, \tag{2}$$

प्राप्त होता है जहाँ $M \neq 0$ और जहाँ $M, \lambda_1,\ldots,\lambda_r$ सब ही α से स्वतंत्र हैं : अतः, (2) उस पंक्ति को, जिसमें अनुबंध $r+\theta$ है, M की r पंक्तियों के गुणजों के योग के रूप में व्यक्त कर देता है; प्रतीकों में,

$$\rho_{r+\theta}=-\frac{\lambda_1}{M}\rho_1-\frac{\lambda_2}{M}\rho_2-\cdots-\frac{\lambda_r}{M}\rho_r$$

यह प्रमेय को तब सिद्ध कर देता है जब r, m से कम हो और n से कम हो।
ध्यान दीजिए कि यह तर्क तब सफल नहीं होता जब $M=0$ हो।

3·2· प्रमेय 32—**A यदि, r क्रम का एक मैट्रिक्स है, तो यह असंभव है कि A में से q पंक्तियाँ चुनकर प्रत्येक दूसरी पंक्ति को इन q पंक्तियों के गुणजों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सके जहाँ $q<r$ है।**

प्रमेय के विपरीत, मान लीजिए, कि हम A में से q पंक्तियाँ चुन सकते हैं और प्रत्येक दूसरी पंक्ति को इनके गुणजों के योग के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

पंक्तियों के लिए अनुबंधों और स्तंभों के लिए अक्षरों का उपयोग कर मान लीजिए A के अवयव इस प्रकार द्योतित किए जाते हैं कि चुनी हुई q पंक्तियाँ $\rho_1, \rho_2,\ldots, \rho_q$ से प्रकट की जा सकें। तो, $k=1,\ldots,m$

के लिए, जहाँ m, A में पंक्तियों की संख्या है, कुछ अचर λ_{tk} इस प्रकार के होंगे कि—

$$\rho_k = \lambda_{1k}\rho_1 + \ldots + \lambda_{qk}\rho_q; \qquad (3)$$

क्योंकि, यदि $k = 1, \ldots, q$ हो तो (3) तब संतुष्ट होता है जब $\lambda_{tk} = \delta_{tk}$ और यदि $k > q$ हो तो (3) हमारी परिकल्पना (hypothesis) को प्रतीकों में व्यक्त कर देता है।

अब स्वेच्छा से, A के r कोटि के किसी भी उपसारणिक को लीजिए। मान लीजिए, उसके स्तंभों के अक्षर $\alpha, \ldots, \theta$ हैं और उसकी पंक्तियों के अनुबंध $k_1, \ldots, k_r$ हैं। तो उपर्युक्त उपसारणिक यह होगा—

$$\begin{vmatrix} \lambda_{1k_1}\alpha_1 + \ldots + \lambda_{qk_1}\alpha_q \ldots \lambda_{1k_1}\theta_1 + \ldots + \lambda_{qk_1}\theta_q \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \lambda_{1k_r}\alpha_1 + \ldots + \lambda_{qk_r}\alpha_q \ldots \lambda_{1k_r}\theta_1 + \ldots + \lambda_{qk_r}\theta_q \end{vmatrix}$$

जो निम्नलिखित दो डिटर्मिनेंटों का पंक्तियों से गुणनफल है—

$$\begin{vmatrix} \lambda_{1k_1} \ldots \lambda_{qk_1} & 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots & \ldots \\ \lambda_{1k_r} \ldots \lambda_{qk_r} & 0 \ldots 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_q & 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots & \ldots \\ \theta_1 \ldots \theta_q & 0 \ldots 0 \end{vmatrix},$$

जिनमें प्रत्येक के $r-q$ स्तंभ शून्यों के हैं।

तदनुसार, हमने जो कुछ माना था, वह यदि ठीक होता तो A का r कोटि का प्रत्येक उपसारणिक शून्य हो जाता। लेकिन यह बात नहीं है क्योंकि A का क्रम r होने के कारण, A का r कोटि का कम से कम एक उपसारणिक ऐसा अवश्य है जो शून्य नहीं है। अतएव हमारी कल्पना सत्य नहीं है और इस प्रकार प्रमेय स्थापित या मान्य हो जाता है।

4. अ-समघाती एकघात समीकरण (Non-homogeneous linear equations)

4.1. अब हम,

$$\sum_{t=1}^{n} a_{it}x_t = b_i \; (i = 1, \ldots, m,), \qquad (1)$$

पर विचार करेंगे जो $x_1, \ldots, x_n$ आदि n अज्ञातों (Unknowns) में, m एकघात समीकरणों का एक समुच्चय है। समीकरणों का इस प्रकार का कोई समुच्चय या तो अविरोधी हो सकता है, अर्थात्, x के मानों का कम से कम एक समुच्चय ऐसा ज्ञात किया जा सकता है कि सारे ही समीकरण संतुष्ट हो सकें, और या वे समीकरण परस्पर विरोधी हो सकते हैं, अर्थात् x के मानों का ऐसा कोई भी समुच्चय नहीं हो सकता कि सारे समीकरण संतुष्ट हो सकें। यह निश्चय करने के लिए कि समी-

करण विरोधी हैं या अविरोधी, हम इन मैट्रिक्सों को लेते हैं—

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} & b_1 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

B को, A का आवर्धित (augmented) मैट्रिक्स कहते हैं।

मान लीजिए, A, B के क्रम क्रमशः r, r′ हैं। तब, या तो $r=r'$, या $r<r'$ चूँकि A का प्रत्येक उपसारणिक, B का एक उपसारणिक है (यदि A में r कोटि का कोई अ-शून्य उपसारणिक है तो B में भी होगा; लेकिन यह आवश्यक नहीं है कि इसका विलोम भी सत्य हो।)

हम यह सिद्ध करेंगे कि **समीकरण तब अविरोधी होंगे जब** $r=r'$ हो **और विरोधी होंगे जब** $r<r'$ **हो।**

4.2. मान लीजिए, $r<r'$. चूँकि $r'\leqslant m$, $r<m$. हम A की r पंक्तियाँ चुन सकते हैं और A की दूसरी प्रत्येक पंक्ति को इन r पंक्तियों के गुणजों के योग के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

मान लीजिए हम (1) के समीकरणों को इस प्रकार अंकित करें कि चुनी हुई r पंक्तियाँ उन पंक्तियों में बदल जाएँ जिनमें अनुबंध 1, . . ., r है। तो हमें इस रूप के समीकरण प्राप्त होते हैं—

$$a_{r+\theta,t}=\lambda_{1\theta}a_{1t}+\ldots+\lambda_{r\theta}a_{rt} \qquad (t=1, \ldots, n) \qquad (2)$$

जहाँ सारे λ, t से स्वतंत्र हैं।

अब हम यह परिकल्पना कर लेते हैं कि (1) समीकरण अविरोधी हैं। तो, (2) को x_t से गुणा करने पर और $t=1$ से $t=n$ तक जोड़ने पर, हमें

$$b_{r+\theta}=\lambda_{1\theta}b_1+\ldots+\lambda_{r\theta}b_r \qquad (3)$$

प्राप्त होते हैं।

(2) और (3) समीकरणों में यह आशय निहित है कि B की किसी भी पंक्ति को, पहली r पंक्तियों के गुणजों के योग के रूप में व्यक्त कर सकते हैं और यह आशय उस तथ्य के विपरीत है कि B का क्रम r′ है। (प्रमेय 32)

अतएव, (1) के समीकरण अविरोधी नहीं हो सकते।

4.3. मान लीजिए, $r'=r$ है। यदि $r=m$ हो तो (1) को नीचे (5) के रूप में लिखा जा सकता है।

यदि $r<m$ हो तो हम B की r पंक्तियाँ चुन सकते हैं और अन्य प्रत्येक पंक्ति को इन r पंक्तियों के गुणजों के योग के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। जैसा पहले भी किया जा चुका है, समीकरणों को इस प्रकार अंकित कीजिए कि ये r पंक्तियाँ $i=1, \ldots, r$ की संगत हो सकें। तो, x का प्रत्येक वह समुच्चय जो,

$$\sum_{t=1}^{n} a_{it} x_t = b_i \ (i = 1, \ldots, r) \qquad (4)$$

को संतुष्ट करता है, (1) के सारे समीकरणों को भी संतुष्ट करेगा।

अब, मान लीजिए, a, (4) में x के गुणांकों के मैट्रिक्स को प्रकट करता है। तो, जैसा आगे सिद्ध किया जाएगा, a का, r कोटिका कम से कम एक उपसारणिक ऐसा होगा जिसका मान शून्य से भिन्न होगा। क्योंकि, A की k-वीं पंक्ति यों लिखी जा सकने के कारण—

$$\lambda_{1k} \rho_1 + \ldots + \lambda_{1k} \rho_{r},$$

A का r कोटिका प्रत्येक उपसारणिक, डिटर्मिनेंट $|\lambda_{ik'}|$ और डिटर्मिनट $|a_{ik''}|$ के गुणनफल के बराबर है जहाँ i के मान 1, . . ., r. आदि हैं। (§3.2 की कार्यप्रणाली में q=r रखकर देखिए); दूसरे शब्दों में, A के r कोटि के प्रत्येक उपसारणिक का एक खंड, r कोटि का a का एक उपसारणिक होता है। लेकिन A का r कोटि का कम से कम एक उपसारणिक ऐसा है जो शून्य नहीं है और इसलिए a का r कोटि का भी एक उपसारणिक शून्य नहीं है।

मान लीजिए, x चरों के अनुबंधों को इस प्रकार अंकित किया जाता है कि a के पहले r स्तंभों से r कोटि का एक अ-शून्य उपसारणिक प्राप्त हो जाए। तो, इस संकेतन में, (4) के समीकरण यों हो जाते हैं—

$$\sum_{t=1}^{r} a_{it} x_t = b_i - \sum_{t=r+1}^{n} a_{it} x_t \qquad (i=1, \ldots, r) \qquad (5)$$

जहाँ कि बाएँ पक्ष में गुणांकों का डिटर्मिनेंट शून्य नहीं है। दाए पक्ष का संकलन या योग (Summation) केवल तभी विद्‌यमान होगा जब $n>r$ हो।

यदि $n>r$ हो तो हम $x_{r+1}, \ldots, x_n$ को स्वेच्छ मान (arbitrary values) दे सकते हैं और फिर (5) के समीकरणों को $x_1, \ldots, x_r$ के लिए अद्‌वितीय रूप से हल कर सकते हैं। अतएव, यदि $r=r'$ और $n>r$ हो तो (1) के समीकरण अविरोधी होंगे और x चरों के $n-r$ समुच्चयों में से कुछ ऐसे होंगे जिन को स्वेच्छ मान † दिए जा सकें।

---

† चरों के n-r समुच्चयों में सब ही को स्वेच्छ मान नहीं दिए जा सकते; इसकी कसौटी यह है कि शेष r चरों के गुणांकों से r कोटि का एक अ-शून्य डिटर्मिनेंट प्राप्त हो सके

यदि $n=r$ हो, तो (5) के समीकरण, और (1) के समीकरण भी, अविरोधी होंगे और उनका एक अद्‌वितीय साधन होगा। इस अद्‌वितीय साधन को प्रतीकों (सातवाँ अध्याय, § 7.5) में इस प्रकार लिख सकते हैं

$$x=A_1^{-1}b,$$

जहाँ A_1, (5) के बाएँ पक्ष गुणांकों का मैट्रिक्स है, b ऐसा एक-स्तंभीय मैट्रिक्स है जिसके अवयव $b_1, \ldots, b_n$ हैं और x ऐसा एक-स्तंभीय मैट्रिक्स है जिसके अवयव $x_1, \ldots, x_n$ हैं।

5. समघाती एकघात समीकरण

$$\sum_{t=1}^{n} a_{it}\, x_t=0\,(i=1,\ldots,m), \qquad (6)$$

समीकरणों को, जो $x_1,\ldots,x_n$ आदि n अज्ञातों में, m समघाती समीकरणों का एक समुच्चय बनाते हैं, (1) के समीकरणों के एक उदाहरण की तरह समझा जा सकता है जब सारे ही b_i शून्य हों। (4) में दिए गए परिणाम सीधे ही लागू हो जाते हैं।

चूँकि सारे ही b_i शून्य हैं, B का क्रम A के क्रम के बराबर होगा और इसलिए (6) के समीकरण परस्पर सदैव अविरोधी होंगे। लेकिन यदि r जो A का क्रम है, n के बराबर हो जाता है तो §4.3 के संकेतन में, (6) के समीकरणों का एकमेव साधन

$$x=A_1^{-1}b,\; b=0$$

से दिया जा सकता है। अतएव, जब $r=n$ हो तो (6) का एकमेव साधन $x=0$ से अर्थात्, $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ से दिया जा सकता है।

जब $r<n$ हो तो जैसे हमने §4.3 में (5) के समीकरणों के होने पर किया था—वैसे ही हम (6) के सावन को निम्नलिखित के सावन के रूप में ला सकते हैं—

$$\sum_{t=1}^{r} a_{it}\, x_t=-\sum_{t=r+1}^{n} a_{it}\, x_t \;(i=1,\ldots,r) \qquad (7)$$

जिसमें बाएँ पक्ष के गुणांकों का डिटर्मिनेंट शून्य नहीं है †। इस स्थिति में, (6) के सारे साधन $x_{r+1},\ldots,x_n$ को स्वेच्छमान देने से, और फिर (7) को $x_1,\ldots,x_r$ के लिए हल करने से प्राप्त हो जाते हैं। एक बार $x_{r+1},\ldots,x_n$ आदि को मान दे देने पर (7) के समीकरण, $x_1,\ldots,x_r$ को अद्‌वितीय रूप से निश्चित कर सकते हैं।

---

†यह आवश्यक नहीं है कि (7) का संकेतन वही हो जो (6) का है: A के अवयवो के नामकरण म और x चरों के अंकन में § 4.3 वाली पदधति अपनाई गई है।

विशेष रूप से यदि चरों की संख्या समीकरणों से अधिक हो, अर्थात् $n>m$ हो तो $r<n$ होगा और समीकरणों का एक साधन $x_1=\ldots=x_n=0$ के अलावा और कुछ होगा।

6. साधनों के मूल समुच्चय

6.1. जब r, जो A का क्रम है, n से कम हो तो मानों के निम्नलिखित $n-r$ समुच्चयों के लिए (7) के समीकरणों को हल करके हमें, (6) के समीकरणों के $n-r$ विभिन्न साधन प्राप्त हो जाते हैं —

$$\left.\begin{array}{llll} x_{r+1}=1, & x_{r+1}=0, & \ldots, & x_{r+1}=0, \\ x_{r+2}=0, & x_{r+2}=1, & \ldots, & x_{r+2}=0, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x_n=0, & x_n=0, & \ldots, & x_n=1. \end{array}\right\} \quad (8)$$

हम $\mathbf{X}$ द्वारा ऐसे एक-स्तंभीय मैट्रिक्स को प्रकट करेंगे जिसके अवयव $x_1,\ldots,x_n$ हैं। (6) के विशेष साधनों (particular solutions) को जो (8) के मानों के समुच्चयों से प्राप्त होते हैं हम

$$\mathbf{X}_k \; (k=1, 2,\ldots,n-r) \quad (9)$$

से प्रकट करेंगे।

जैसा कि हम §6.2 में सिद्ध करेंगे, (7) का व्यापक साधन (general solution) $\mathbf{X}$, जो (7) में $x_{r+1},\ldots,x_n$ को स्वेच्छ मान देने से प्राप्त होता है, निम्नलिखित सूत्र के द्वारा प्रस्तुत किया जा सकता है—

$$\mathbf{X}=\sum_{k=1}^{n-r} x_{r+k}\,\mathbf{X}_k \quad (10)$$

दूसरे शब्दों में, (a), (6) का प्रत्येक साधन, $\mathbf{X}_k$ विशेष साधनों के गुणजों का एक योग है। इसके अतिरिक्त, (b), कोई भी $\mathbf{X}_k$ दूसरे $\mathbf{X}_k$ के गुणजों का योग नहीं है। साधनों के ऐसे समुच्चय को, जिसमें (a) और (b) वाले गुणधर्म हों, **साधनों का मूल समुच्चय** कहते है।

साधनों के मूल समुच्चय एक से अधिक होते है। यदि हम (8) में बराबर के चिह्नों (equality signs) के दाहिनी ओर की संख्याओं के बदले, $n-r$ कोटि के किसी व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स के अवयवों को रख दें तो हमें (6) के साधनों का एक मूल समुच्चय प्राप्त हो जाता है। इन संख्याओं के बदले यदि $n-r$ कोटि के किसी अव्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स के अवयव रख दिए जाएँ तो हमें (6) के ऐसे $n-r$ साधन

प्राप्त होते हैं जिनसे साधनों का एक मूल समुच्चय नहीं बनता। इसको हम §6.4 में सिद्ध करेंगे।

6.2. §6.1 में दिए गए कथनों की उपपत्तियां† :—

हमारी चर्चा, n अज्ञातों में m समघाती एकघात समीकरणों के एक समुच्चय से ही संबद्ध होगी जब कि गुणांकों के मैट्रिक्स का क्रम r हो और $r<n$ हो। जैसा हम देख चुके है इस प्रकार के किसी समुच्चय का प्रत्येक साधन, वास्तव में उन समीकरणों के एक समुच्चय का एक साधन होता है जिनको हम इस रूप में लिख सकते हैं—

$$\sum_{t=1}^{r} a_{it}\, x_t = -\sum_{t=r+1}^{n} a_{it}\, x_t \quad (i=1,\ldots,r), \qquad (7)$$

जिसमें कि, बाएँ पक्ष के गुणांकों का डिटर्मिनेंट शून्य नहीं है। इसलिए, हम पहले वाले समीकरणों के बदले केवल (7) पर ही विचार करेंगे।

§6.1. की तरह, $\mathbf{X}$ द्वारा $x_1,\ldots,x_n$ को प्रकट करेंगे जब इनको एक स्तंभ वाले मैट्रिक्स की पंक्तियों के अवयवों की तरह माना जाए, $\mathbf{X}_k$ द्वारा (7) के समीकरणों के वे विशेष साधन प्रकट किए जाएगे जो (8) के मानों के समुच्चयों द्वारा प्राप्त होते हैं। इसके अतिरिक्त, $\mathbf{I}_k$ के द्वारा (8) के k-वें स्तंभ को प्रकट किया जाएगा जब उसको एक एकस्तंभीय मैट्रिक्स की तरह माना जाए, अर्थात् $\mathbf{I}_k$ की k-वीं पंक्ति में एक और शेष n—r—1 पंक्तियों में शून्य होगा। मान लीजिए, A_1 द्वारा (7) के समीकरणों में बाएँ पक्ष के गुणांकों का मैट्रिक्स प्रकट किया जाता है और A_1^{-1} द्वारा A_1 का व्युत्क्रम प्रकट होता है।

उपपत्ति में एक स्थान पर हम $\mathbf{X}_a^{a+s}$ के द्वारा $x_a,\ldots,x_{a+s}$ को प्रकट करेंगे जब इन को एक एकस्तंभीय मैट्रिक्स के अवयवों की तरह समझा जाए।

(7) का व्यापक साधन, $x_{r+1},\ldots,x_n$, को स्वेच्छ मान देने से और फिर समीकरणों को $x_1,\ldots,x_r$ के लिए (अद्वितीय रूप से, चूँकि A_1 व्युत्क्रमणीय है) हल करने से प्राप्त होता है। इस साधन को प्रतीकों में व्यक्त किया जा सकता है। उपमैट्रिक्सों (sub-matrices) की युक्ति का यदि उपयोग किया जाए तो—

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^r \\ \mathbf{X}_{r+1}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} \sum_{k=1}^{n-r} \begin{bmatrix} a_{1,r+k} \\ \cdots \\ a_{r,r+k} \end{bmatrix} x_{r+k} \\ \sum_{k=1}^{n-r} \mathbf{I}_k\, x_{r+k} \end{bmatrix}$$

---

†बहुत से पाठक, कम से कम पहले पठन में, इन उपपत्तियों को छोड़ देना पसंद करेंगे। नौसिखिए के लिए §6 का शेष भाग कुछ कठिन ही होगा।

लेकिन, अंतिम मैट्रिक्स यों हैं—

$$\sum_{k=1}^{n-r} x_{r+k}\left[\begin{matrix} A_1^{-1}\begin{bmatrix} a_{1,\ r+k} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{r,\ r+k}\end{bmatrix} \\ \mathbf{I}_k \end{matrix}\right] = \sum_{k=1}^{n-r} x_{r+k}\,\mathbf{X}_k,$$

और इस प्रकार यह सिद्ध हो जाता है कि (7) का प्रत्येक साधन इस सूत्र से व्यक्त किया जा सकता है—

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^{n-r} x_{r+k}\,\mathbf{X}_k. \tag{10}$$

6.3. एक मूल समुच्चय में $n-r$ साधन होते हैं।

6. 31. हम पहले यह सिद्ध करेंगे कि $n-r$ से कम साधनों का कोई समुच्चय मूल समुच्चय नहीं हो सकता है।

मान लीजिए, $\mathbf{Y}_1, \ldots\ldots \mathbf{Y}_\rho$,जहाँ $\rho < n-r$ है, (7) के कोई ρ विभिन्न साधन हैं। जो कुछ हम सिद्ध करना चाहते हैं उसके विपरीत मान लीजिए, $\mathbf{Y}_i$ एक मूल समुच्चय बनाता है। तो कुछ अचर λ_{ik} इस प्रकार के होंगे कि—

$$\mathbf{X}_k = \sum_{i=1}^{\rho} \lambda_{ik}\,\mathbf{Y}_i \qquad (k=1,\ldots\ldots,n-r),$$

जहाँ $\mathbf{X}_k$, §6.1 (9) के साधन हैं। प्रमेय 31 को मैट्रिक्स $[\lambda_{ik}]$ में लागू करने से, जिसका क्रम ρ से अधिक नहीं हो सकता, हम प्रत्येक $\mathbf{X}_k$ को, उनमें से (अधिक से अधिक) ρ के गुणजों के योग में व्यक्त कर सकते हैं। लेकिन, (8) में मानों की सारणी के अनुसार, यह असंभव है, और इसलिए हमने जो कुछ माना था वह सही नहीं हो सकता और $\mathbf{Y}_i$ एक मूल समुच्चय नहीं बना सकता।

6.32. अब हम यह सिद्ध करेंगे कि $n-r$ से अधिक साधनों के किसी समुच्चय में (कम से कम) एक साधन शेष के गुणजों का एक योग होता है:

मान लीजिए, $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_\rho$ जहाँ $\rho > n-r$, (7) के कोई ρ विभिन्न साधन हैं। तो (10) से,

$$\mathbf{Y}_i = \sum_{k=1}^{n-r} \mu_{ik}\,\mathbf{X}_k \qquad (i=1,\ldots\ldots\rho,)$$

जहाँ, μ_{ik}, $\mathbf{Y}_i$ में x_{r+k} का मान है। जैसा §6.31 में किया गया है बिलकुल वैसे ही, हम प्रत्येक $\mathbf{Y}_i$ को, उनमें से (अधिक से अधिक) $n-r$ के गुणजों के एक योग के रूप में प्रकट कर सकते हैं।

6.33. मूल समुच्चय की परिभाषा से और §§6.31 और 6.32 से यह स्पष्ट हो जाता है कि एक मूल समुच्चय में $n-r$ साधन होने चाहिएँ।

6.4. §6.1 में दिए गए कथनों की उत्पत्ति (पूर्वानुबद्ध)

6.41. $[c_{ik}]$ यदि, $n-r$ कोटि का एक व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स है और X'_i यदि (7) का वह साधन है जो निम्नलिखित मानों को लेने से प्राप्त होता है

$$x_{r+1}=c_{i1},\ x_{r+2}=c_{i2},\ \ldots\ x_n=c_{i,n-r}$$

तो, §6.2 में जो कुछ सिद्ध किया गया है, उससे

$$\mathbf{X}'_i=\sum_{k=1}^{n-r} c_{ik}\mathbf{X}_k\ (i=1,\ \ldots,\ n-r).$$

इन समीकरणों को हल करने से (दे० सातवाँ अध्याय §3.1) हमें निम्नलिखित प्राप्त होते हैं—

$$\mathbf{X}_i=\sum_{k=1}^{n-r} \gamma_{ik}\,\mathbf{X}'_k\ (i=1,\ \ldots,\ n-r), \qquad (11)$$

जहाँ $[\gamma_{ik}]$, $[c_{ik}]$ का व्युत्क्रम है।

अतएव, (10) से, (7) का प्रत्येक साधन इस रूप में लिखा जा सकता है—

$$\mathbf{X}=\sum_{i=1}^{n-r} x_{r+i}\sum_{k=1}^{n-r}\gamma_{ik}\mathbf{X}'_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n-r}\left(\sum_{i=1}^{n-r} x_{r+i}\gamma_{ik}\right)\mathbf{X}'_k.$$

इसके अतिरिक्त, यह संभव नहीं है कि किसी एक X'_k को शेष के गुणजों के एक योग के रूप में प्रकट किया जा सके। क्योंकि यदि ऐसा होता तो (11) से इस रूप† के समीकरण प्राप्त हो जाएँगे—

$$\mathbf{X}_i=\sum_{k=1}^{n-r-1} \beta_{ik}\mathbf{X}'_k\ (i=1,\ldots,\ n-r)$$

और इन समीकरणों में, §6.31 से, यह भाव निहित होगा कि एक $\mathbf{X}_i$ को बाकी के गुणजों के एक योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

इसलिए, X'_i साधनों से एक मूल समुच्चय बनता है।

6.42. $[c_{ik}]$ यदि $n-r$ कोटि का कोई अव्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स है तो उसके अवयवों के उपयुक्त अंकन से, कुछ अचर $\lambda_{\theta s}$ इस प्रकार के होंगे कि—

$$c_{p+\theta,k}=\sum_{s=1}^{p}\lambda_{\theta s}c_{sk} \qquad (k=1,\ \ldots,\ n-r),$$

जहाँ, ρ, मैट्रिक्स का क्रम है और इसलिए $\rho < n-r$.

---

†हम यह मान लेते हैं कि साधनों का अंकन ऐसे हुआ है कि $\mathbf{X}'_{n-r}$ को शेष के गुणजों के योग के रूप में लिखा जा सके।

लेकिन, (10) से,

$$X'_{\rho+\theta}=\sum_{k=1}^{n-r} c_{\rho+\theta,k}X_k \quad (\theta=1,\ldots,n-r-\rho)$$

और, $X'_s=\sum_{k=1}^{n-1} c_{sk}X_k$ $(\rho=1,\ldots,\rho)$

इसलिए, एक समीकरण ऐसा होगा कि—

$$X'_{\rho+\theta}=\sum_{s=1}^{\rho} \lambda_{\theta s}X'_s$$

और इसलिए X'_i से साधनों का एक मूल समुच्चय नहीं बन सकता।

6.5. साधनों का ऐसा समुच्चय कि उनमें से कोई भी शेष के गुणजों के योग के रूप में व्यक्त न किया जा सके—एकघाततः स्वतंत्र (Linearly Independent) कहलाता है।

§§6.41 और 6.42 में जो कुछ सिद्ध किया जा चुका है उसके अनुसार, साधनों का एक ऐसा समुच्चय जो एक व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स $[c_{ik}]$ से प्राप्त या व्युत्पन्न (derived) हो, एकघाततः स्वतंत्र होता है और साधनों का एक ऐसा समुच्चय जो एक अव्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स $[c_{ik}]$ से व्युत्पन्न हो एकघाततः स्वतंत्र नहीं होता।

इसके अनुसार, यदि $n-r$ साधनों का कोई समुच्चय एकघाततः स्वतंत्र है तो वह एक व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स $[c_{ik}]$ से व्युत्पन्न होना चाहिए और फलस्वरूप, § 6.41 से, साधनों का इस प्रकार का एक समुच्चय, एक मूल समुच्चय होगा।

अतएव,

$n-r$ साधनों का कोई भी एकघाततः स्वतंत्र समुच्चय, एक मूल समुच्चय होता है।

इसके अतिरिक्त, **$n-r$ साधनों का कोई भी ऐसा समुच्चय जो एकघाततः स्वतंत्र नहीं होता, एक मूल समुच्चय नहीं होता,** क्योंकि वह एक अव्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स $[c_{ik}]$ से व्युत्पन्न होना चाहिए।

प्रश्नावली नौ

मैट्रिक्स का क्रम मालूम करने के परिकलनों को कम करने के तरीके

1. सिद्ध कीजिए कि किसी मैट्रिक्स के अवयवों में निम्नलिखित परिवर्तनों के बाद भी उसके क्रम में कोई अंतर नहीं पड़ता:

   (i) दो पंक्तियों (स्तंभों) का विनिमय,

   (ii) किसी पंक्ति (स्तंभ) का किसी अ-शून्य अचर से गुणन,

   (iii) किन्हीं दो पंक्तियों का संकलन।

संकेत—क्रम का ज्ञान इस बात पर निर्भर होता है कि मैट्रिक्स के कौन से उपसारणिक अ-शून्य डिटर्मिनेंट है। या, संक्षेप में, प्रश्नावली सात, 18-20 और नवें अध्याय के प्रमेय 34 का उपयोग कीजिए।

2. जब $[a_{ik}]$ का $r+1$ कोटि का प्रत्येक उपसारणिक जिसमें पहली r पंक्तियाँ और r स्तंभ हों, शून्य हो, तो सिद्ध कीजिए कि कुछ अचर λ_{ik} ऐसे होंगे कि $[a_{ik}]$ की k-वीं पंक्ति,

$$\rho_k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ik}\rho_i$$

से व्यक्त की जा सकती है। §3.2 के तरीके से, या किसी और तरीके से, सिद्ध कीजिए कि तब $r+1$ कोटि का $[a_{ik}]$ का प्रत्येक उपसारणिक शून्य होता है।

3. प्रश्न 2 का उपयोग करके, सिद्ध कीजिए कि यदि r कोटि का एक उपसारणिक अ-शून्य हो तथा यदि उसके किनारों पर किसी भी अन्य स्तंभ तथा किसी भी अन्य पंक्ति के अवयवों को रख करके प्राप्त होने वाला प्रत्येक उपसारणिक शून्य हो तो मैट्रिक्स का क्रम r होता है।

4. **सममित वर्ग मैट्रिक्सों के लिए नियम :** यदि r कोटि का एक मुख्य उपसारणिक अशून्य हो और $r+1$ कोटि के सारे मुख्य उपसारणिक शून्य हों तो मैट्रिक्स का क्रम r होता है। (प्रश्न 11 के बाद का नोट देखिए)

$[a_{ik}]$ के लिए निम्नलिखित निष्कर्षों की स्थापना के बाद इस नियम को सिद्ध कीजिए।

(i) $$C = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1r} & a_{1s} & a_{1t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \cdot & \cdot & a_{rr} & a_{rs} & a_{rt} \\ a_{s1} & \cdot & \cdot & a_{sr} & a_{ss} & a_{st} \\ a_{t1} & \cdot & \cdot & a_{tr} & a_{ts} & a_{tt} \end{vmatrix} \quad (a_{ik}=a_{ki}),$$

में A_{ik} यदि a_{ik} के सहखण्ड को प्रकट करना है तो $A_{ss}A_{tt} - A_{ts}A_{st} = MC$, जहाँ M वास्तव में, C में $a_{ss}a_{tt} - a_{ts}a_{st}$ का पूरक उपसारणिक (complementary minor) है। (प्रमेय 18)।

(ii) यदि प्रत्येक $C=0$ और प्रत्येक संगत $A_{ss}=0$, तो प्रत्येक $A_{st}=A_{ts}=0$ और (प्रश्न 2) $r+1$ कोटि का, पूरे मैट्रिक्स $[\,a_{ik}\,]$ का प्रत्येक उपसारणिक शून्य होता है।

(iii) यदि $r+1$ और $r+2$ कोटि के सारे मुख्य उपसारणिक शून्य हैं तो क्रम, r या उससे कम, होता है। (इसको आगम से सिद्ध किया जा सकता है।)

संख्यात्मक प्रश्न

5. निम्नलिखित मैट्रिक्सों का क्रम ज्ञात कीजिए—

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$,

(iii) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, (iv) $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{bmatrix}$.

उत्तर— (i) 3, (ii) 2, (iii) 4, (iv) 2.

ज्यामितीय अनुप्रयोग

6. किसी समतल में एक बिंदु के समघाती निर्देशांक $(x, y, z,)$ हैं। सिद्ध कीजिए कि तीन बिंदु (x_r, y_r, z_r), $r=1,2,3$ संरेखी (collinear) या असंरेखी (non-collinear) होंगे

यदि मैट्रिक्स $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z^1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ का क्रम क्रमशः 2 या 3 हो।

7. स्वेच्छा से लिए गए किसी बिंदु के निर्देशांक, प्रश्न 6 के संकेतन में, इस रूप में लिखे जा सकते हैं—

$$x=\lambda x_1+\mu x_2+\nu x_3,$$

$$y=\lambda y_1+\mu y_2+\nu y_3,$$

$$z=\lambda z_1+\mu z_2+\nu z_3,$$

बशर्ते कि बिंदु 1, 2, 3 संरेखी न हों।

सुझाव—4 पंक्तियों और 3 स्तंभों के मैट्रिक्स को लेकर प्रमेय 31 का उपयोग कीजिए।

8. प्रश्न 6 और 7 के कथनों के अनुरूप (analogues) दीजिए जब त्रिविम आकाश में एक बिंदु के समघाती निर्देशांक (x, y, z, w) हों।

9. आकाश में तीन समतलों का विन्यास (configuration), जिनके कार्तीय समीकरण (cartesian equations),

$$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i \quad (i=1,2,3),$$

हैं, $A\equiv[a_{ik}]$ मैट्रिक्सों और आवर्धित मैट्रिक्स B (§ 4.1) के क्रमों से निर्धारित किया जा सकता है। निम्नलिखित निष्कर्षों की जाँच कीजिए।

(i) जब $|a_{ik}| \neq 0$ तो A का क्रम 3 है और तीनों समतल एक परिमित बिंदु (finite point) पर मिलते हैं।

(ii) जब A का क्रम 2, और B का क्रम 3 है तो समतलों के प्रतिच्छेद (intersection) का कोई परिमित बिंदु नहीं होता।

सारे समतल केवल तभी समांतर होंगे यदि प्रत्येक A_{ik} शून्य होगा, जब A का क्रम 1 हो। जब A का क्रम 2 है, तो,

यातो (a) कोई भी दो समतल समांतर नहीं हैं,

या (b) दो समांतर हैं और तीसरा नहीं है।

चूँकि $|a_{ik}|=0$,

$$A_{11} : A_{12} : A_{13} = A_{21} : A_{22} : A_{23} = A_{31} : A_{32} : A_{33}$$

(प्रमेय 12), और यदि समतल 2 और 3 एक दूसरे को काटते है तो उनकी प्रतिच्छेद-रेखा की दिक्कोज्याएँ A_{11}, A_{12}, A_{13} के समानुपाती (proportional) होंगी। अतएव, (a) में, समतल तीन समांतर रेखाओं में मिलते है, और (b) में, तीसरा समतल, दोनों समांतर समतलों को दो समांतर रेखाओं में मिलता है।

विन्यास इस प्रकार का होगा कि तीनों समतल एक त्रिभुजाकार प्रिज्म (Triangular prism) बनाते हैं; एक विशिष्ट स्थिति में, प्रिज्म के दो फलक समांतर भी हो सकते हैं।

(iii) जब A का क्रम 2 और B का क्रम 2 है तो एक समीकरण शेष दो के गुणजों का एक योग हो जाता है। इन दो समीकरणों से दिए जाने वाले समतल समांतर नहीं हैं (नहीं तो A का क्रम 1 हो जाएगा), और इसलिए विन्यास ऐसा होगा कि तीन समतल हैं जिनकी एक सर्वनिष्ठ प्रतिच्छेद रेखा है।

(iv) जब A का क्रम 1 और B का क्रम 2 है तो तीनों समतल समांतर हैं।

(v) जब A का क्रम 1 और B का क्रम 1 है तो तीनों समीकरण एक ही समतल को प्रकट करते हैं।

10. सिद्ध कीजिए कि (x_1, x_2, x_3) के लंबकोणीय प्रक्षेप के उस रेखा पर जो मूलबिंदु से गुज़रती हो और जिसकी दिक्कोज्याएँ (l_1, l_2, l_3) हों, समकोणिक कार्तीय निर्देशांक (X_1, X_2, X_3) इस प्रकार दिए जा सकते हैं—

$$X = \begin{vmatrix} l_1^2 & l_1 l_2 & l_1 l_3 \\ l_1 l_2 & l_2^2 & l_2 l_3 \\ l_1 l_3 & l_2 l_3 & l_3^2 \end{vmatrix} x,$$

जहाँ X, x एकस्तंभीय मैट्रिक्स हैं।

11. यदि L प्रश्न 10 के मैट्रिक्स को प्रकट करता है, और M एक संगत m मैट्रिक्स को प्रकट करता है तो सिद्ध कीजिए कि—

$$L^2 = L \text{ और } M^2 = M$$

और यह कि $(L+M)x$ बिंदु, l और m रेखाओं के समतल में किसी रेखा पर x का प्रक्षेप, तब और केवल तभी होगा जब l और m लंब हों।

नोट :—एक 'मुख्य उपसारणिक' (principal minor) तब प्राप्त होता है जब संगत स्तंभों और पंक्तियों को मिटा दिया जाए।

अध्याय 9

मैट्रिक्सों के सहचारी डिटर्मिनेंट

(Determinants Associated with Matrices)

1. मैट्रिक्सों के किसी गुणनफल का क्रम

1.1. मान लीजिए कि, A, n स्तंभों का एक मैट्रिक्स है और B, n पंक्तियों का एक दूसरा मैट्रिक्स है जिससे गुणनफल AB बनाया जा सकता है। जब A में n_1 पंक्तियाँ हों और B में n_2 स्तंभ हों तो गुणनफल A B में n_1 पंक्तियाँ और n_2 स्तंभ होंगे।

यदि a_{ik}, b_{ik}, क्रमशः A, B के दो प्रतिनिधि अवयव हैं, तो,

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$$

AB का एक प्रतिनिधि अवयव होगा।

AB का कोई t-पंक्तियों वाला उपसारणिक, अवयवों के उपयुक्त अंकन या नामकरण से,

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot\ \cdot & c_{1t} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot\ \cdot & c_{2t} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{t1} & c_{t2} & \cdot\ \cdot & c_{tt} \end{vmatrix}$$

द्वारा प्रकट किया जा सकता है।

जब $t=n$ (इसमें यह मान लिया गया है कि $n_1 \geqslant n$, $n_2 \geqslant n$) हो, तो Δ निम्नलिखित दो डिटर्मिनेंटों का पंक्तियों से गुणनफल है—

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\ \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot\ \cdot & b_{n1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{1n} & \cdot\ \cdot & b_{nn} \end{vmatrix};$$

अर्थात्, Δ वास्तव में, A के t-पंक्तियों वाले एक उपसारणिक का B के t-पंक्तियों वाले उपसारणिक से गुणनफल है।

जब, $t \neq n$, तो, Δ इन दो सरणियों का पंक्तियों से गुणनफल है—

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{t1} & \cdot\ \cdot & a_{tn} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b_{11} & \cdot\ \cdot & b_{n1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{1t} & \cdot\ \cdot & b_{nt} \end{matrix}$$

अतएव, (प्रमेय 15 देखिए), जब $t>n$, तो $\triangle$ शून्य है; और जब $t<n$, तो $\triangle$, t कोटि के उन संगत डिटर्मिनेंटों के सब गुणनफलों का योग है जो इन सरणियों से बनाए जा सकते हैं (प्रमेय 14) ।

अतएव, n से अधिक कोटि का AB का प्रत्येक उपसारणिक शून्य है, और $t \leqslant n$ कोटि का प्रत्येक उपसारणिक, A के t-पंक्तियों के एक उपसारणिक का B के t-पंक्तियों के एक उपसारणिक से गुणनफलों का योग है।
तदनुसार,

प्रमेय 33.—किसी गुणनफल AB का क्रम उसके किसी खंड के क्रम से अधिक नहीं हो सकता।

क्योंकि, जो कुछ हम पहले कह चुके, हैं, उससे (i) AB का n से अधिक पंक्तियों का प्रत्येक उपसारणिक शून्य है, तथा A और B के क्रम n से अधिक नहीं हो सकते, (ii) AB का $t \leqslant n$ कोटि का प्रत्येक उपसारणिक, A और B के, t कोटि के उपसारणिकों के गुणनफलों का योग या गुणनफल होता है। यदि r कोटि के A के समस्त उपसारणिक या B के समस्त उपसारणिक शून्य हो जाते है तो AB के भी r कोटि के समस्त उपसारणिक शून्य होंगे।

1.2. एक प्रकार का गुणन ऐसा होता है जो अधिक सूक्ष्मता का एक प्रमेय प्रस्तुत करता है ।

प्रमेय 34—यदि A में m पंक्तियाँ और n स्तंभ हों और B एक n कोटि का व्युत्क्रमणीय वर्ग मैट्रिक्स हो, तो A और AB दोनों का क्रम समान होता है; और यदि C एक m कोटि का व्युत्क्रमणीय वर्ग मैट्रिक्स हो, तो A और CA का क्रम समान होता है।

यदि A का क्रम r है और AB का क्रम ρ है, तो $\rho \leqslant r$ होगा। लेकिन $A=AB.\,B^{-1}$ और इसलिए r, जो A का क्रम है, ρ और n से अधिक नहीं हो सकता जो क्रमश: AB और B^{-1} खंडों के क्रम हैं। अतएव $\rho=r$ होगा।

CA के लिए भी इसी प्रकार की उपपत्ति दी जा सकती है।

2. अभिलक्षण-समीकरण; अभिलक्षणिक मूल (The Characteristic equation; Latent roots)*

2.1. n कोटि के प्रत्येक वर्गमैट्रिक्स A का सहचारी एक दूसरा मैट्रिक्स $A-\lambda I$ होता है, जहाँ I, n कोटि का तत्समकारी (unit) मैट्रिक्स है और λ वास्तविक

*Latent roots=Characteristic roots.

या संमिश्र, कोई संख्या है। पूरा लिखने पर यह मैट्रिक्स यों है—

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

इस मैट्रिक्स का डिटर्मिनेंट इस रूप का होगा —

$$f(\lambda)\equiv(-1)^n(\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\ldots+p_n), \qquad (1)$$

जहाँ p_r वास्तव में, a_{ik} (से बन सकने वाले) n^2 अवयवों में बहुपद हैं। समीकरण $f(\lambda)=0$, अर्थात्,

$$|A-\lambda I|=0, \qquad (2)$$

के मूलों को, मैट्रिक्स A के **अभिलक्षणिक मूल** और स्वयं समीकरण को, A का **अभिलक्षण-समीकरण** कहते हैं।

2.2. प्रमेय 35—**प्रत्येक वर्ग मैट्रिक्स स्वयं अपने अभिलक्षण-समीकरण को संतुष्ट करता है; अर्थात्, यदि**

$$|A-\lambda I|=(-1)^n(\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_n),$$

तो $$A^n+p_1 A^{n-1}+\cdots+p_{n-1}A+p_nI=0.$$

$A-\lambda I$ का सहखंडज (adjoint) मैट्रिक्स मान लीजिए B, एक ऐसा मैट्रिक्स होता है जिसके अवयव, λ में $n-1$ या उस से कम घात के बहुपद होते हैं जहाँ λ के विभिन्न घातों के गुणांक a_{ik} में बहुपद होते हैं। इस तरह के मैट्रिक्स को यों लिख सकते हैं—

$$B_0+B_1\lambda+\cdots+B_{n-2}\lambda^{n-2}+B_{n-1}\lambda^{n-2} \qquad (3)$$

जहाँ B_r वे मैट्रिक्स हैं जिनके अवयव a_{ik} में बहुपद हैं।

अब, प्रमेय 24 से, किसी मैट्रिक्स का उसके सहखंडज से गुणनफल=मैट्रिक्स का डिटर्मिनेंट × तत्समकारी मैट्रिक्स। अतएव,

$$(A-\lambda I)B=|A-\lambda I|\times I$$

(i) के संकेतन का उपयोग करके

$$=(-1)^n(\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\ldots+p_n)I,$$

चूँकि B को (3) से प्रकट किया जा सकता है, इसलिए,

$$(A-\lambda I)(B_0+B_1\lambda+\ldots+B_{n-2}\lambda^{n-2}+B_{n-1}\lambda^{n-1})$$
$$=(-1)^n(\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\ldots+p_n)\,I.$$

यह समीकरण λ के सभी मानों के लिए सही है और अतएव λ के गुणांकों† को परस्पर समीकरण के रूप में लिख सकते हैं; और इस प्रकार —

$$-B_{n-1}=(-1)^n I \quad (IB_{n-1}=B_{n-1}),$$
$$-B_{n-2}+AB_{n-1}=(-1)^n p_1 I,$$
$$-B_{n-3}+AB_{n-2}=(-1)^n p_2 I,$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$-B_0+AB_1=(-1)^n p_{n-1} I,$$
$$AB_0=(-1)^n p_n I.$$

अतएव हमारे पास,

$$A^n+p_1A^{n-1}+\ldots+p_{n-1}A+p_nI$$
$$=A^nI+A^{n-1}p_1I+\ldots+Ap_{n-1}I+p_nI$$
$$=(-1)^n\left\{-A^nB_{n-1}+A^{n-1}(-B_{n-2}+AB_{n-1})+\ldots+\right.$$
$$\left.+A(-B_0+AB_1)+AB_0\right\}$$
$$=0.$$

2.3. यदि $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ आदि मैट्रिक्स A के अभिलक्षणिक मूल हों जिससे,

$$|A-\lambda I| =(-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)$$
$$=(-1)^n (\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+ \ldots+p_n),$$

यह स्पष्ट हो जाता है (देखिए, प्रश्नावली सात का प्रश्न 13) कि,

$$(A-\lambda_1I)(A-\lambda_2I)\ldots(A-\lambda_nI)=A^n+p_1A^{n-1}+\ldots+p_nI=0.$$

इससे यह अनुमान नहीं लगा लेना चाहिए कि $A-\lambda_rI$ मैट्रिक्सों में से कोई शून्य मैट्रिक्स है।

---

†हम समीकरण को निम्नलिखित n^2 समीकरणों की रूपरेखा का एक ढाँचा-सा मान सकते हैं।—

$$(a_{ik}-\lambda\delta_{ik})(b^{(o)}_{ik}+\ldots+b^{(n-1)}_{ik}\lambda^{n-1})$$
$$=(-1)^n(\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\ldots+p_n)\delta_{ik} \quad (i, k=1,\ldots n),$$

जिस से कि गुणांकों का समीकरण वास्तव में सामान्य बीजगणितीय तरीकों से किए जाने की तरह हो जाता है जब इसको λ के प्रत्येक घात के लिए n^2 बार किया गया हो।

3. डिटर्मिनेंटों और अभिलक्षणिक मूलों पर एक प्रमेय

3.1. प्रमेय 36. यदि $g(t)$, t में एक बहुपद है, और A एक वर्ग मैट्रिक्स है तो मैट्रिक्स $g(A)$ का डिटर्मिनेंट गुणनफल

$g(\lambda_1)\ g(\lambda_2)\ \ldots, g(\lambda_n)$, के बराबर होता है। जहाँ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda n$ आदि A के अभिलक्षणिक मूल हैं।

मान लीजिए, $g(t)=c(t-t_1)\ldots(t-t_m)$,

जिसके फलस्वरूप, $g(A)=c(A-t_1I)\ldots(A-t_mI)$

तो, छठे अध्याय, § 10 से,

$$\begin{aligned} |g(A)| &= c^n\,|A-t_1I| \times \ldots \times |A-t_mI| \\ &= (-1)^{mn}c^n f(t_1)\ldots f(t_m) \\ &= c^n \prod_{r=1}^{n}(\lambda_r-t_1)\ldots\prod_{r=1}^{n}(\lambda_r-t_m) \\ &= \prod_{r=1}^{n} g(\lambda_r). \end{aligned}$$

यह प्रमेय तब भी लागू होता है जब $g(A)$ एक परिमेय फलन (rational function) $g_1(A)/g_2(A)$ हो बशर्ते कि $g_2(A)$ व्युत्क्रमणीय हो।

3.2. इसके अतिरिक्त, मान लीजिए $g_1(A)$ और $g_2(A)$, मैट्रिक्स A में दो बहुपद हैं जिनमें से $g_2(A)$ व्युत्क्रमणीय है। तो मैट्रिक्स

$$\lambda I-\left\{g_1(A)/g_2(A)\right\},$$

अर्थात् $\left\{\lambda g_2(A)-g_1(A)\right\}/g_2(A)$

A का एक परिमेय फलन होगा जिसमें $g_2(A)$ व्युत्क्रमणीय हर (denominator) है। प्रमेय को यदि इस फलन में लागू किया जाए, और $g_1'(A)/g_2(A)=g(A)$ लिखा जाए, तो

$$|\lambda I-g(A)| = \prod_{r=1}^{n}\left\{\lambda-g(\lambda_r)\right\}.$$

इससे एक महत्वपूर्ण निष्कर्ष का पता लगता है:

प्रमेय 36 का उपप्रमेय—**यदि $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ आदि मैट्रिक्स A के अभिलक्षणिक मूल हैं और $g(A)$ का रूप $g_1(A)/g_2(A)$ सा है, जहाँ g_1, g_2 बहुपद हैं और $g_2(A)$ व्युत्क्रमणीय है, तो मैट्रिक्स $g(A)$ के अभिलक्षणिक मल $g(\lambda_r)$ से दिए जा सकते हैं।**

4. तुल्य मैट्रिक्स (Equivalent matrices)

4.1 मानक रूप के लिए किसी मैट्रिक्स के प्रारंभिक रूपांतर (Elementary transformations of a matrix to standard form)

परिभाषा 18—**किसी मैट्रिक्स के प्रारंभिक रूपांतरण यों होते हैं—**

(i) **दो पंक्तियों या स्तंभों का विनिमय,**

(ii) **किसी पंक्ति (या स्तंभ) के प्रत्येक अवयव का शून्य के अलावा किसी और अचर से गुणन,**

(iii) **किसी पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों में, किसी दूसरी पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों के एक अचर गुणज का योग।**

मान लीजिए, A, r कोटि का एक मैट्रिक्स है, तो, जैसा सिद्ध किया जाएगा, यह प्रारंभिक रूपांतरणों के द्वारा,

$$\left|\begin{array}{c:c} I & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right|$$

की तरह के एक मैट्रिक्स में बदला जा सकता है जहाँ I द्वारा r कोटि का तत्समकारी मैट्रिक्स और शून्यों के द्वारा शून्य-मैट्रिक्स प्रकट होते हैं जो साधारणतया आयतीय होंगे।

सर्वप्रथम† (i) की तरह के प्रारंभिक रूपांतरण, A के बदले एक ऐसा r मैट्रिक्स ले आते हैं कि उसकी पहली r पंक्तियों और r स्तंभों के सर्वनिष्ठ अवयवों से बनने वाला उपसारणिक शून्य के बराबर नहीं होता। फिर, A की किसी भी दूसरी पंक्ति को हम इन r पंक्तियों के गुणजों के योग के रूप में लिख सकते हैं; पंक्तियों के इन गुणजों को दी हुई पंक्ति में से घटाने पर शून्यों की एक पंक्ति आ जाएगी। (iii) के प्रकार के इन रूपांतरणों से मैट्रिक्स के क्रम में कोई अंतर नहीं आता

---

†जो तर्क हम देंगे उसका आधार आठवें अध्याय का §3 होगा।

(दे० प्रश्नावली IX, 1) और हमारे मैट्रिक्स का नया रूप यों हो जाता है—

$$\left|\begin{array}{c:c} P & Q \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right|,$$

जहाँ P, r पंक्तियों और स्तंभों का, ऐसा मैट्रिक्स है कि $|P| \neq 0$, और शून्यों से शून्य-मैट्रिक्स प्रकट होते हैं।

जो काम पंक्तियों में किया था, अब स्तंभों में करने पर, इसको (iii) प्रकार के, प्रारंभिक रूपांतरणों से, इस तरह रूपांतरित किया जा सकता है—

$$\left|\begin{array}{c:c} P & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right|.$$

आखिर में, मान लीजिए P का पूरा रूप यों है—

$$\left|\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & .. & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & .. & k_2 \\ . & . & . & .. & . \\ a_r & b_r & c_r & .. & k_r \end{array}\right|.$$

फिर, (i) और (iii) प्रकार के प्रारंभिक रूपांतरणों से P को क्रमशः इन रूपों में लाया जा सकता है—

$$\left|\begin{array}{ccccc} a_1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ a_2 & \beta_2 & \gamma_2 & .. & k_2 \\ . & . & . & .. & . \\ a_r & \beta_r & \gamma_r & .. & k_r \end{array}\right|,$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} a_1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & .. & . \\ a'_r & \beta_r & c'_r & .. & k_r' \end{array}\right|$$

और, इसी प्रकार, धीरे-धीरे इसको उस मैट्रिक्स के रूप में लाया जा सकता है, जिसमें मुख्य विकर्ण के अलावा सब स्थानों पर शून्य हो और उस विकर्ण में शून्य † न हों।

(ii) प्रकार के, प्रारंभिक रूपांतरणों से, हमारे समक्ष r कोटि का तत्समकारी मैट्रिक्स, I आ जाता है।

---

†यदि विकर्ण का कोई अवयव शून्य है तो P का क्रम r से कम हो जाता है : इन सारे रूपांतरणों से क्रम में कोई अंतर नहीं आता।

4.2. जैसा प्रश्नावली VII, 18–20 से पता लग सकता है, § 4.1 में जिन रूपांतरणों पर विवेचन किया गया है वे तब भी किए जा सकते हैं जब A का व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्सों से पूर्व––और उत्तर-गुणन किया जाए––हम कह सकते हैं कि यह सिद्ध हो चुका है कि––

जब A, r क्रम का एक मैट्रिक्स हो, तो B और C दो व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स इस प्रकार के होते हैं कि

$$BAC = I'_r,$$

जहां I'_r, r कोटि का ऐसा तत्समकारी मैट्रिक्स है जिसके किनारों में शून्य मैट्रिक्स हैं ।

4.3. परिभाषा 19. **दो मैट्रिक्स तुल्य (EQUIVALENT) कहे जाते हैं यदि यह संभव हो कि एक से दूसरा कुछ प्रारंभिक रूपांतरणों द्वारा प्राप्त हो सके ।**

यदि A_1 और A_2 तुल्य हैं, तो उनका क्रम एक ही होगा और व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स B_1, B_2, C_1, C_2 आदि इस प्रकार के होंगे कि––

$$B_1A_1C_1 = I'_r = B_2A_2C_2$$

इससे यह स्पष्ट हो जाता है कि $A_1 = B_1^{-1} B_2A_2C_2C_1^{-1}$

$= LA_2M$ (मान लीजिए),

जहां, $L = B_1^{-1}B_2$ और अतएव व्युत्क्रमणीय है, तथा $M = C_2C_1^{-1}$ और यह भी व्युत्क्रमणीय है ।

तदनुसार जब दो मैट्रिक्स तुल्य होते हैं तो प्रत्येक को दूसरे से, व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स से पूर्व-और उत्तर-गुणन करके प्राप्त किया जा सकता है ।

विलोमतः A_2 का क्रम यदि r हो, L और M व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स हों, और

$$A_1 = LA_2M;$$

हो,तो जैसा हम सिद्ध करेंगे, A_2 से A_1 या A_1 से A_2 कुछ प्रारंभिक रूपांतरणों के द्वारा प्राप्त किए जा सकते हैं । A_2 और A_1 दोनों का क्रम r है (देखिए प्रमेय 34)। जैसा §4.1 में देखा जा सकता है, हम A_2 से I'_r कुछ प्रारंभिक रूपांतरणों से प्राप्त कर सकते हैं, हम A_1 से I'_r भी कुछ प्रारंभिक रूपांतरणों के द्वारा प्राप्त कर सकते हैं और इसलिए, उल्टे चलकर अर्थात् प्रतिलोम संक्रियाओं (inverse operations) से I'_r से A_1 भी प्रारंभिक रूपांतरणों से प्राप्त हो सकता है । अतएव A_2 से A_1 या A_1 से A_2, प्रारंभिक रूपांतरणों के द्वारा प्राप्त हो सकते हैं ।

4.4. सिद्धांतों के सूक्ष्म और उच्च अध्ययन में मूल्य मैट्रिक्सों के अध्ययन का प्रमुख और महत्त्वपूर्ण स्थान है । यहाँ हमने परिभाषा से निकल सकने वाले केवल कुछ निष्कर्षों की रूपरेखा पर ही विचार किया है† ।

---

†विषय के गंभीर अध्ययन के लिए पाठक को एच० डब्ल्यू० टर्नबुल और ए० सी० एटकन द्वारा रचित 'एन इण्ट्रोडक्शन टु दि थ्योरी ऑफ कॅनानिकल मैट्रिसेज' (लंदन एण्ड ग्लास्गो, 1932) देखनी चाहिए ।

भाग III

एकघाती ग्रौर द्विघाती समघात;

निश्चर ग्रौर सहचर

(LINEAR AND QUADRATIC FORMS; INVARIANTS AND COVARIANTS)

अध्याय 10

बीजीय समघात : एकघाती रूपांतरण

1. संख्या फील्ड

प्राथमिक नोट में एक संख्या फील्ड की परिभाषा को हम फिर से देखेंगे।

परिभाषा 1. वास्तविक या संमिश्र, संख्याओं के एक समुच्चय को संख्याओं के एक फील्ड या एक संख्या फील्ड कहा जाता है, जब, यदि r और s समुच्चय में हों और s शून्य न हो, तो

$$r+s,\ r-s,\ r\times s,\ r\div s$$

भी समुच्चय में हों।

सख्या फील्डों के कुछ उदाहरण ये हैं—

(i) समस्त परिमेय वास्तविक संख्याओं का फील्ड (मान लीजिए, $\mathfrak{F}_r$);

(ii) समस्त वास्तविक संख्याओं का फील्ड;

(iii) $a+b\sqrt{5}$ के रूप की समस्त संख्याओं का फील्ड, जहाँ a और b परिमेय वास्तविक संख्याएँ हैं;

(iv) समस्त संमिश्र संख्याओं का फील्ड।

प्रत्येक संख्या फील्ड में वे प्रत्येक और समस्त संख्याएँ अवश्य होंगी जो $\mathfrak{F}_r$[ऊपर दिया हुआ उदाहरण (i)] में समाविष्ट या सम्मिलित हैं; उसमें 1 अवश्य होगा क्योंकि उसमें भागफल (quotient) α/α है, जहाँ α समुच्चय की कोई भी संख्या है; उसमें 0, 2, और प्रत्येक पूर्णांक भी होगा, क्योंकि उसमें अंतर $1-1$, जोड़ $1+1$, आदि आदि हैं; उसमें प्रत्येक भिन्न (fraction) भी होगी क्योंकि उसमें किसी पूर्णांक का किसी दूसरे से भागफल है।

2. एकघाती और द्विघाती समघात

2.1. मान लीजिए, $\mathfrak{F}$ संख्याओं का कोई फील्ड है और a_{ij}, b_{ij}. . आदि फील्ड की कुछ निश्चित या निर्धारित संख्याएँ है; यानी हम यह मान लेते हैं कि उनके मान निश्चित या नियत हैं। मान लीजिए, $x_r, y_r, \ldots$ आदि कुछ ऐसी संख्याएँ हैं जो नियत या निश्चित नहीं हैं बल्कि एक दूसरे फील्ड $\mathfrak{F}_1$ में से कोई भी स्वेच्छ संख्याएँ हैं जो आवश्यक रूप से $\mathfrak{F}$ ही नहीं है। $a_{ij}, b_{ij}, \ldots$ आदि संख्याओं को हम $\mathfrak{F}$ में अचर; और $x_r, y_r \ldots$ आदि प्रतीकों को हम $\mathfrak{F}_1$ में चर कहते हैं।

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad (1)$$

की तरह के किसी व्यंजक को x_j चरों में एकघाती समघात कहते हैं;

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \qquad (2)$$

की तरह के किसी व्यंजक को x_i और y_j चरों में द्वि-एकघाती समघात (BILINEAR FORM) कहते हैं;

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij}=a_{ji}) \qquad (3)$$

की तरह के किसी व्यंजक को x_i चरों में द्विघाती समघात (QUADRATIC FORM) कहते हैं। प्रत्येक स्थिति में जब हम इस बात पर ज़ोर देना चाहते हैं कि सारे अचर a_{ij} एक विशेष फील्ड, मान लीजिए $\mathfrak{F}$ में हैं तो हम यह कहेंगे कि समघात के गुणांक $\mathfrak{F}$ में हैं।

एक ऐसा समवात जिसमें चर अनिवार्यतः अर्थात आवश्यक रूप से वास्तविक संख्याएँ ही हों 'वास्तविक चरों में समघात' कहा जाता है और जिसमें गुणांक और चर दोनों ही अनिवार्यतः वास्तविक संख्याएँ हों 'वास्तविक समघात' कहा जाता है।

2.2. इस बात पर ध्यान देना चाहिए कि शब्द 'द्विघाती समघात' को (3) के लिए केवल तभी प्रयुक्त करते हैं जब $a_{ij}=a_{ji}$ हो। इस बंधन की उपयोगिता अनुभव से ही पता लगती है जब हम यह जान जाते है कि आगे आने वाले सिद्धान्तों में इस बंधन से अधिक सूक्ष्मता आ जाती है।

लेकिन यह बंधन वास्तविकता से दिखावटी अधिक हैं: क्योंकि,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j,$$

की तरह का कोई व्यंजक, जहाँ b_{ij} सदैव b_{ji} के बराबर नहीं होता, द्विघाती समघात

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$$

से अभिन्न हो जाता है जब हम सब a की परिभाषा इन समीकरणों से देते हैं :—

$$a_{ii}=b_{ii}, \quad a_{ij}=a_{ji}=\tfrac{1}{2}(a_{ij}+b_{ji})$$

उदाहरण के लिए, $x^2+3xy+2y^2$ दो चर x और y में एक द्विघाती समघात है जिसके गुणांक यों हैं:--

$$a_{11}=1, \quad a_{22}=2, \quad a_{12}=a_{21}=\tfrac{3}{2}$$

2.3. एकघाती और द्विघाती समघातों के सहचारी मैट्रिक्स—सममित वर्ग मैट्रिक्स $A=[a_{ij}]$, जिसकी i–पंक्ति और j–वें स्तंभ में a_{ij} है, द्विघाती समघात (3) का सहचारी है : यह सममित है क्योंकि $a_{ij}=a_{ji}$, और इसलिए $A=A'$, जो A का परिवर्त है ।

बाद में प्रायः इस बात का ध्यान रखना आवश्यक होगा कि किसी द्विघाती समघात का सहचारी मैट्रिक्स एक सममित मैट्रिक्स होता है ।

द्विघाती समघात (2) का m और n स्तंभों वाला मैट्रिक्स $[a_{ij}]$ सहचारी होता है; एकघाती समघात (1) का एक-पंक्ति मैट्रिक्स $[a_{i1},\ldots,a_{in}]$ सहचारी होता है । व्यापक रूप से ,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad x_j \qquad (i=1, \quad \ldots,m) \qquad (4)$$

आदि m एकघाती समघातों का m पंक्तियों और n स्तंभों वाला मैट्रिक्स $[a_{ij}]$ सहचारी होता है ।

2.4. संकेतन—(2), (3), या (4) में से किसी एक के सहचारी मैट्रिक्स $[a_{ij}]$ को हम केवल एक अक्षर A द्वारा प्रकट करते हैं । सुविधा के लिए फिर हम इस के संक्षिप्त रूप बना सकते हैं :–

द्विएकघाती (2) को A(x,y) के रूप में, द्विघाती समघात (3) को A (x,x) के रूप में, और m एकघाती समघातों (4) को Ax रूपों में । इनमें से पहले दो वास्तव में शार्टहैण्ड के संकेतन के समान है; तीसरे को भी हालांकि इसी के समान माना जा सकता है लेकिन उस गुणनफल की तरह समझना अधिक अच्छा होगा जो मैट्रिक्स A को मैट्रिक्स x से गुणा करने पर प्राप्त होता है जहाँ x वास्तव में, $x_1,\ldots, x_n$ आदि अवयवों का **एकस्तंभीय** मैट्रिक्स है : तो मैट्रिक्स गुणनफल Ax जिसमें उतनी ही पंक्तियाँ हैं जितनी A में हैं और जिसमें उतने ही स्तंभ हैं जितने x में हैं, m पंक्तियों का एक ऐसा एकस्तंभीय मैट्रिक्स है जिसके अवयवों के रूप में m एकघाती समघात आते हैं ।

2.5. द्विघाती और द्विएकघाती समघातों के लिए मैट्रिक्स व्यंजक–§ 2.4 की तरह, मान लीजिए, x एक ऐसे एकस्तंभीय मैट्रिक्स को प्रकट करता है जिसके अवयव$x_1,\ldots x_n$ हैं तो x' जो x का परिवर्त है, उस एकपंक्ति-मैट्रिक्स को प्रकट करता है जिसके अवयव $x_1,\ldots x_n$, हैं

मान लीजिए, A, द्विघाती समघात $\Sigma\,\Sigma\; a_{rs}\, x_r\, x_s$ के मैट्रिक्स को प्रकट करता है । तो, Ax ऐसा एकस्तंभीय मैट्रिक्स है जिसकी rवीं पंक्ति का अवयव

$$ar_1\, x_1+\ldots+a_{rn}\, x_n$$

है और x' Ax एक पंक्ति (x' का पंक्तियों की संख्या) और एक स्तंभ (Ax के स्तंभों की संख्या) का एक मैट्रिक्स है और उसका अकेका अवयव यों होगा ।

$$\sum_{r=1}^{n} x_r \ (a_{r1}\ x_1+\ldots+a_{rn}\ x_n)=\sum_{r=1}^{n}\ \sum_{s=1}^{n} a_{rs}x_r x_s$$

इस प्रकार द्विघाती समघात केवल एक-अवयवी (single-element) मैट्रिक्स $x'\ Ax$ द्वारा प्रकट और व्यक्त हो जाता है ।

इसी तरह जब x और y ऐसे एक-स्तंभीय मैट्रिक्स हों जिनकी पंक्तियों के अवयव, क्रमशः $x_1,\ldots,x_n$ और $y_1,\ldots,y_n$ हों तो द्वि-एकघाती समघात (2) केवल एक-अवयवी मैट्रिक्स $x'\ Ay$ द्वारा प्रकट और व्यक्त किया जा सकता है ।

2.6. **परिभाषा 2—द्विसमघात**

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_i\ x_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$$

का विवेचक उसके गुणाकों का डिटर्मिनेंट अर्थात $[a_{ij}]$ होता है ।

3. एकघाती रूपांतरण (Linear Transformations)

3.1. निम्नलिखित समीकरणों का समुच्चय

$$X_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (j=1,\ldots,n), \tag{1}$$

जहाँ a_{ij} दिए हुए अचर हैं, और x_j चर हैं, x_j चरों और X_i चरों को परस्पर मिलाने वाला या संयोजित करने वाला एक एकघाती रूपांतरण कहा जाता है। जब a_{ij} किसी दिए हुए फील्ड $\mathfrak{F}$ में अचर हो तो हम यह कहते हैं कि रूपान्तरण के गुणांक $\mathfrak{F}$ में है; जब a_{ij} वास्तविक संख्याएँ हों तो हम यह कहते हैं कि रूपांतरण वास्तविक है ।

परिभाषा 3. डिटर्मिनेंट $[a_{ij}]$ को जिसके अवयव रूपांतरण (1) के गुणांक $[a_{ij}]$ हैं, रूपांतरण का मापांक कहते हैं ।

परिभाषा 4. एक रूपांतरण को व्युत्क्रमणीय कहा जाता है यदि उसका मापांक शून्य न हो, और व्युत्क्रमणीय कहा जाता है यदि उसका मापांक शून्य हो ।

कभी-कभी (1) को x_i से X_i तक रूपांतरण, या संक्षेप में केवल, $x\to X$, भी कहा जाता है ।

3.2. रूपांतरण (1) की सुविधा के लिए

$$X=Ax, \tag{2}$$

लिखा जा सकता है । यह एक ऐसा मैट्रिक्स समीकरण है जिसमें X और x एकस्तंभीय मैट्रिक्सों को प्रकट करते हैं जिनके अवयव क्रमशः $X_1,\ldots,X_n$ और $x_1,\ldots,x_n$ हैं । A, मैट्रिक्स (a_{ij}) को प्रकट करता है और Ax, दो मैट्रिक्सों A और x के गुणनफल को प्रकट करता है ।

जब A एक व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स होता है तो उसका एक व्युत्क्रम A^{-1} (दे० सातवाँ अध्याय, § 3) होता है और

$$A^{-1}X=A^{-1}Ax=x, \qquad (3)$$

जो x को सीधे ही X के पदों में दे देता है। इसके साथ-साथ, $(A^{-1})^{-1}=A$, और इसलिए, एक व्युत्क्रमणीय रूपांतरण में इससे कुछ अन्तर नहीं पड़ता कि उसको $x\to X$ के रूप में कहा जाएया $X\to x$ के रूप में। इसके अतिरिक्त, जब $X=Ax$ हो तो X चाहे कुछ भी हो उसका एक और केवल एक संगत x होता है और वह $x=A^{-1}X$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

जब A एक अव्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स हो तो कुछ X ऐसे हो सकते हैं जिनके कोई संगत x नहीं कहे जा सकते। क्योंकि ऐसी परिस्थिति में r, जो कि मैट्रिक्स A का क्रम है, n से कम हो जाता है, और हम A की r पंक्तियाँ चुनकर प्रत्येक अन्य पंक्ति को इन पंक्तियों के गुणजों के योग के रूप में लिख सकते हैं। (दे० प्रमेय 31) इस प्रकार पंक्तियों के उपयुक्त अंकन पर, (1) इन संबंधों को देता है—

$$X_k=\sum_{i=1}^{r} l_{ki} X_i \quad (k=r+i,\ldots, n), \qquad (4)$$

जहाँ l_{ki} अचर हैं और अतएव समुच्चय $X_1, \ldots, X_n$ केवल उन समुच्चयों तक सीमित है जो (4) को संतुष्ट करते हैं: X का एक ऐसा समुच्चय जो (4) को संतुष्ट नहीं करता, X का कोई संगत समुच्चय नहीं देगा। उदाहरण के लिए, एकघाती रूपांतरण,

$$X=2x+3y, \qquad Y=4x+6y,$$

में जिसमें अव्युत्क्रमीमणीय मैट्रिक्स $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ है, X, Y के द्वारा $2X=Y$ का संबंध संतुष्ट होना चाहिए; क्योंकि किसी भी युग्म X, Y के लिए जो इसको संतुष्ट नहीं करता कोई भी संगतयुग्म x, y नहीं होता।

3.3. दो रूपांतरणों का गुणनफल — मान लीजिए, x, y, z **'संख्याएँ'** हैं (दे० छठा अध्याय, § 1), जिसमें प्रत्येक के n घटक हैं और यह मान लीजिए कि सभी अनुबंध 1 से n तक के मान ग्रहण करते हैं। संकलन की परिपाटी का उपयोग करने पर हम देखते हैं कि रूपांतरण

$$x_i=a_{ij}\ y_j \qquad (1)$$

को एक मैट्रिक्स समीकरण $x=Ay$ (§ 3.2) के रूप में लिखा जा सकता है, और रूपांतरण

$$y_j=b_{jk}\ z_k \qquad (2)$$

को एक मैट्रिक्स समीकरण $y=Bz$ के रूप में लिखा जा सकता है।

यदि (1) में हम y को z के पदों में रख दें तो हमें

$$x_i = a_{ij}\ b_{jk}\ z_k, \qquad (3)$$

प्राप्त होता है जो एक ऐसा रूपांतरण है जिसका मैट्रिक्स गुणनफल AB है। (छठे अध्याय के § 4 से तुलना कीजिए)। इस प्रकार $x=Ay$ और $Y=Bz$ दो उत्तरोत्तर रूपांतरणों के परिणाम को

$$x = ABz$$

लिखा जा सकता है।

चूंकि AB, दो मैट्रिक्सों का गुणनफल है, हम स्वयं रूपांतरणों के लिए इसी प्रकार में नामों को अपनाएँगे।

परिभाषा 5—रूपांतरण $x=ABz$ को, $x=Ay$, $y=Bz$ **दो रूपांतरणों का गुणनफल कहते हैं। [यह** $x=Ay$, $y=Bz$, **उत्तरोत्तर रूपांतरणों का परिणाम है।]**

रूपांतरण (3) का मापांक, डिटर्मिनेन्ट $|a_{ij}\ b_{jk}|$ अर्थात्, दो डिटर्मिनेन्ट $|A|$ और $|B|$ का गुणन फल है। इसी प्रकार, यदि हमारे पास उत्तरोत्तर रूप से तीन रूपांतरण यों हों—

$$x=Ay,\ y=Bz,\ z=Cu$$

तो परिणामस्वरूप आने वाला रूपांतरण $x=ABCu$ होगा और इस रूपांतरण का मापांक, $|A|$, $|B|$ और $|C|$, आदि तीन मापांकों का गुणनफल होगा; यही बात रूपांतरणों की किसी भी परिमित संख्या के लिए कही जा सकती है।

4. द्विघाती और द्विएकघाती समघातों के रूपांतरण

4.1. एक दिए रूपांतरण

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} X_k \ (i=1, \ldots, n) \qquad (1)$$

और एक दिए हुए द्विघाती समघात

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j \ (a_{ij}=a_{ji}) \qquad (2)$$

पर विचार कीजिए।

जब हम (2) में (1) से दिए जा सकने वाले $x_1, \ldots, x_n$ के मानों को रखते हैं तो हम को $X_1, \ldots, X_n$ में एक द्विघाती व्यंजक प्राप्त होता है। इस द्विघाती व्यंजक को (2) का (1) से रूपांतरण, या (1) को समघात (2) में लागू करने का परिणाम कहते हैं।

प्रमेय 37.—यदि किसी रूपान्तरण $x=BX$ को एक द्विघाती समघात $A(x, x)$ में अनुप्रयुक्त किया जाए तो परिणाम एक द्विघाती समघात $C(X, X)$ होता है जिसका मैट्रिक्स C इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है—

$$C=B'AB,$$

जहाँ B', B का परिवर्त है।

पहली उपपत्ति—जो सम्पूर्ण रूप से मैट्रिक्स सिद्धांत पर निर्भर है।

समघात $A(x, x)$ को मैट्रिक्स गुणनफल $x'Ax$ द्वारा व्यक्त किया जा सकता है (§ 2.5 से तुलना कीजिए,)। परिकल्पना से, $x=BX$ और इसमें यह निहित है कि $x'=X'B'$ (प्रमेय 23) । अतएव, गुणन के साहचर्य नियम से,

$$x'Ax=X'B'ABX$$
$$=X'CX, \qquad (3)$$

जहाँ C, मैट्रिक्स $B'AB$ को प्रकट करता है।
इसके अतिरिक्त, (3) केवल $X_1, \ldots, X_n$ में एक द्विघाती व्यंजक ही नहीं है बल्कि वास्तव में, एक ऐसा द्विघाती समघात है जिसमें $c_{ij}=c_{ji}$ है। इसको सिद्ध करने के लिए हम देखते हैं कि, जब $C=B'AB$, तो,

$$C'=B'A'B \text{ (प्रमेय 23 का उपप्रमेय)}$$
$$=B'AB \text{ (चूँकि } A=A')$$
$$=C;$$

दूसरे शब्दों में, $c_{ij}=c_{ji}$.

दूसरी उपपत्ति—जो मुख्यतया संकलन परिपाटी के उपयोग पर निर्भर है। मान लीजिए, सारे अनुबंधों में 1 से n तक के मान हैं और फिर सर्वत्र संकलन-परिपाटी का उपयोग कीजिए । तब, द्विघाती समघात यों होगा———

$$a_{ij}\, x_i\, x_j \quad (a_{ij}=a_{ji}) \qquad (4)$$

रूपांतरण $\quad x_i=b_{ik}\, X_k \qquad (5)$

(4) को, $\quad c_{kl}\, X_k\, X_l \qquad (6)$

के रूप में व्यक्त कर देता है । समस्त c के मानों को हम x को X के पदों में प्रति-स्थापित करके मालूम कर सकते हैं। तब,

$$a_{ij}\, x_i\, x_j=a_{ij}\, b_{ik}\, X_k\, b_{jl}\, X_l$$
$$=b_{ik}\, a_{ij}\, b_{jl}\, X_k\, X_l,$$

जिसके फलस्वरूप, $c_{kl}=b_{ik}\, a_{ij}\, b_{jl}=b'_{ki}\, a_{ij}\, b_{jl}$,

जहाँ $b'_{ki}=b_{ik}$ वास्तव में, B' की k-वीं पंक्ति और i-वें स्तंभ का अवयव है। अतएव, (6) का मैट्रिक्स C, मैट्रिक्स गुणनफल $B'AB$ के बराबर है।

इसके अतिरिक्त, $c_{kl}=c_{lk}$, क्योंकि, $a_{ij}=a_{ji}$, होने के कारण, हमारे पास,

$$c_{kl}= b_{ik}\ a_{ij}\ b_{jl}=b_{jk}\ \ a_{ji}\ b_{il},$$

और, चूंकि i और j दोनों ही मूक हैं,

$$b_{ik}\ a_{ji}\ b_{jl}=b_{jk}\ \ a_{ij}\ b_{il}.$$

जो कि वही योग का या संकलन है जो $b_{il}\ a_{ij}\ b_{jk}$ या c_{lk} है। अतएव, (6) एक ऐसा द्विघाती समघात है जिसमें $c_{kl}=c_{lk}$.

4.2. प्रमेय 38—**यदि $x=CX$, $y=BY$ रूपांतरणों को एक द्विएकघाती समघात $A(x, y)$ में अनुप्रयुक्त किया जाए तो परिणाम एक ऐसा द्विएकघाती समघात $D(X, Y)$ होता है जिसका मैट्रिक्स D इस प्रकार दिया जा सकता है**

$$D=C'AB$$

जहाँ C', C का परिवर्त है।

पहली उपपत्ति—प्रमेय 37 की पहली उपपत्ति की तरह, हम द्विएकघाती समघात को एक मैट्रिक्स गुणनफल $x'\ Ay$ के रूप में लिखते हैं। चूंकि $x'=X'C'$, यह स्पष्ट हो जाता है कि,

$$x'Ay=X'C'ABY=X'DY,$$

जहाँ $D=C'AB$.

4.3. **दूसरी उपपत्ति**—इसका प्रयोजन मुख्यतया यह बताना है कि मैट्रिक्सों के उपयोग से कितनी संक्षिप्तता आ जाती है : इसको उपपत्ति के सबसे सरल रूप में भी माना जा सकता है। द्विएकघाती समघात

$$A(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n}\ a_{ij}\ x_i\ y_j \qquad (1)$$

को इस तरह लिखा जा सकता है—

$$A(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\ l_i x_i,\ l_i=\sum_{j=1}^{n}\ a_{ij}\ y_j$$

जितने भी y हैं, उनका निम्नलिखित से रूपांतरण कीजिए।

$$y_j=\sum_{k=1}^{n}\ b_{jk}\ Y_k \qquad (j=1,\ldots,n),$$

जिसके फलस्वरूप,

$$l_i=\sum_{j=}^{n}\ a_{ij}\sum_{k=1}^{n}\ b_{jk}\ Y_k,$$

और $$A(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{k=1}^{n}\left(\ \sum_{=1}^{n}\ a_{ij}\ b_{jk}\right) x_i Y_k. \qquad (2)$$

x और Y में इस द्विएकघाती समघात के मैट्रिक्स की iवीं पंक्ति और kवें स्तंभ का अवयव $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ है।

यह मैट्रिक्स इसलिए AB है, A जहाँ [a_{ik}] और B, [b_{ik}] है। फिर, (1) में जितने x हैं उनका निम्नलिखित से रूपांतरण कीजिए और जितने y है उन्हें अपरिवर्तित रहने दीजिए—

$$xi=\sum_{k=1}^{m} c_{ik} X_k \quad (i=1, \ldots, m), \tag{3}$$

तो,

$$A(x, y)=\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \sum_{k=1}^{m} c_{ik} X_k$$

$$=\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} c_{ik} a_{ij} \right) X_k y_j. \tag{4}$$

योग $\sum_{i=1}^{m} c_{ik} a_{ij}$,

$$\begin{bmatrix} c_{11} \ldots c_{m1} \\ \ldots\ldots \\ c_{1m} \ldots c_{mm} \end{bmatrix} \tag{5}$$

की i-वीं पंक्ति का

$$\begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{bmatrix} \tag{6}$$

के jवें स्तंभ से आंतरिक गुणनफल है। (5) वास्तव में,

$$\begin{bmatrix} c_{11} \ldots c_{1m} \\ \ldots\ldots \\ c_{m1} \ldots c_{mm} \end{bmatrix},$$

का परिवर्त अर्थात् C का परिवर्त है जो रूपांतरण (3) का मैट्रिक्स है जब कि (6) द्विएकघाती समघात (1) का मैट्रिक्स A हैं। अतएव द्विएकघाती समघात (4) का मैट्रिक्स C'A है।

उपर्युक्त दो रूपांतरणों को उत्तरोत्तर लागू करने से प्रमेय स्पष्ट हो जाता है।

4.4. किसी द्विघाती समघात का विवेचक

प्रमेय 39—**मान लीजिए, एक द्विघाती समघात**

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j \;(a_{ij}=a_{ji}) \qquad (1)$$

को एक एकघाती रूपांतरण

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}\, X_k \;(i=1,\ldots, n)$$

द्वारा रूपांतरित किया जाता है, जिसका मापांक, अर्थात् डिटर्मिनेन्ट $|l_{ik}|$, M के बराबर है; मान लीजिए परिणामी द्विघाती समघात यों है—

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, X_i\, X_j \;(c_{ij}=c_{ji}) \qquad (2)$$

तो (2) का विवेचक, (1) के विवेचक का M^2 गुना होता है; प्रतीकों में—

$$| c_{ij} | = M^2 \, | a_{ij} |. \qquad (3)$$

इस प्रमेय के विषय को इस प्रकार संक्षेप में कह सकते हैं **जब किसी द्विघाती समघात को नए चरों में बदला जाता है, तो विवेचक, रूपांतरण के मापांक के वर्ग से गुणित हो जाता है।**

इसके फलस्वरूप, प्रमेय 37 का एक उपप्रमेय प्राप्त होता है; उस प्रमेय के अनुसार, समघात (2) का मैट्रिक्स $C=L'AL$ है, जहाँ L, रूपांतरण का मैट्रिक्स है। (2) का विवेचक, अर्थात् डिटर्मिनेंट, $| C |$, तीन डिटर्मिनेंटों $| L' |$, $| A |$, और $| L |$ के गुणनफल द्वारा दिया जा सकता है (दे० छठा अध्याय, §10)।

लेकिन $| L |=M$, और चूँकि डिटर्मिनेंट के मान में, पंक्तियों और स्तंभों के विनिमय से कोई अंतर नहीं पड़ता, $| L' |$ भी M के बराबर होगा, अतएव

$$| C |=M^2 \, | A |.$$

इस प्रमेय का प्रमुख महत्व है; आने वाले अध्यायों में इसका प्रायः उपयोग होगा।

5. हर्मिटीय समघात (Hermitian forms)

5.1. अर्थ की दृष्टि से एक हर्मिटीय द्विएकघाती समघात का सबसे अधिक प्रचलित रूप इस प्रकार दिया जाता है—

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j, \qquad (1)$$

जहाँ गुणांक a_{ij} संमिश्र संख्याओं के फील्ड में से है और इस प्रकार हैं कि—

$$a_{ji} = \bar{a}_{ij}.$$

यहाँ दण्ड (bar), संमिश्र चर के सिद्धांत की तरह, संयुग्मी संमिश्र को प्रकट करता है; अर्थात्, यदि $z = \alpha + i\beta$, जहाँ α और β वास्तविक हैं, तो $\bar{z} = \alpha - i\beta$.

समघात (1) के गुणांकों का मैट्रिक्स A प्रतिबंध

$$A' = \bar{A}. \qquad (2)$$

को संतुष्ट करता है: कोई भी मैट्रिक्स जो (2) को संतुष्ट करता है, एक **हर्मिटीय मैट्रिक्स** कहलाता है।

5.2

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \bar{x}_j \; (a_{ji} = \bar{a}_{ij})$$

की तरह के किसी समघात को **हर्मिटीय समघात** कहते हैं।

इन समघातों का सिद्धांत लगभग वैसा ही है जैसा साधारण द्विएकघातो और द्विघाती समघातों का होता है। हर्मिटीय समघातों से संबद्ध प्रमेय, इस अध्याय के अन्त में और बाद के अध्यायों में, उदाहरणों की तरह आएँगे।

6. सहरूपांतरी और प्रतिरूपांतरी समुच्चय (Cogredient and contragredient sets)

6.1. यदि चरों के दो समुच्चय $x_1, \ldots, x_n$ और $y_1, \ldots, y_n$ दो दूसरे समुच्चय $X_1, \ldots, X_n$ और $Y_1, \ldots, Y_n$ से एक ही रूपांतरण मान लीजिए,

$$x = AX, \; y = AY,$$

द्वारा संबद्ध हों तो दोनों समुच्चयों, x और y को (इसी प्रकार, X और Y को) चरों के सहरूपांतरी समुच्चय कहते हैं।

यदि एक समुच्चय $z_1, \ldots, z_n$ एक दूसरे समुच्चय $Z_1, \ldots, Z_n$ से, एक ऐसे रूपांतरण द्वारा संबद्ध हो जिसका मैट्रिक्स, A के परिवर्त का व्युत्क्रम है, अर्थात् यदि,

$$z = (A')^{-1} Z, \text{ या } Z = A'z,$$

तो x और z समुच्चयों को (इसी तरह X और Z को) चरों के प्रतिरूपांतरी समुच्चय कहते हैं।

सहरूपांतरी समुच्चयों के उदाहरण प्रायः और सरलता से देखे जा सकते हैं। समतल वैश्लेषिक ज्यामिति (plane analytical geometry) में एक निर्देश त्रिभुज से किसी दूसरे में रूपांतरण इस तरह का होता है—

$$\left.\begin{array}{l} x=l_1\, X+m_1\, Y+n_1Z, \\ y=l_2\, X+m_2\, Y+n_2Z, \\ z=l_3\, X+m_3\, Y+n_3Z, \end{array}\right\} \quad (1)$$

यहाँ $(x_1,\ y_1,\ z_1,)$ और $(x_2, y_2, z_2,)$ चरों के समुच्चयों को यदि दो अलग-अलग बिन्दुओं के निर्देशांक (coordinates) माना जाए तो वे सहरूपांतरी समुच्चय कहे जाएँगे : नए निर्देश-त्रिभुज में इन बिन्दुओं के निर्देशांकों का हवाला (X_1, Y_1, Z_1) और (X_2, Y_2, Z_2) से दिया जाएगा, और इनमें से प्रत्येक, (1) के समीकरणों में ही उपयुक्त अनुबंध रख देने से प्राप्त हो जाता है :

वैश्लेषिक ज्यामिति में प्रतिरूपांतरी समुच्चयों का भी एक महत्वपूर्ण उदाहरण मिलता है। मान लीजिए,

$$lx+my+nz=0 \quad (2)$$

समघात बिन्दु-निर्देशांकों (x,y,z) के एक निकाय (system) में एक दिए निर्देशत्रिभुज के सापेक्ष किसी दी हुई रेखा α का समीकरण है। तो α के रेखा-(स्पर्श-रेखीय=Tangential) निर्देशांक (l, m, n) होंगे। एक दूसरा निर्देशत्रिभुज लीजिए और यह मान लीजिए कि (1), बिन्दु-निर्देशांकों के लिए रूपांतरण है। तो (2) का रूप ऐसा हो जाता है—

$$LX+MY+NZ=0$$

जहाँ,

$$\left.\begin{array}{l} L=l_1l\ +l_2m\ +l_3n, \\ M=m_1l+m_2m+m_3n, \\ N=n_1l+n_2m\ +n_3n. \end{array}\right\} \quad (3)$$

(3) में l,m,n के गुणांकों का मैट्रिक्स, (1) में X,Y,Z के गुणांकों के मैट्रिक्स का परिवर्त है। अतएव, जब निर्देश-त्रिभुज बदल दिया जाता है तो बिन्दु-निर्देशांक (x,y,z) और रेखा-निर्देशांक (l, m, n) प्रतिरूपांतरी चर हो जाते हैं। [यह ध्यान देने योग्य है कि (1) वास्तव में $X, Y, Z \rightarrow x, y, z$ है जब कि (3), $l, m, n \rightarrow L,M,N$ है।]

अब तक उपयोग किए संकेतन तब और भी अधिक सुसंबद्ध और संक्षिप्त हो जाते हैं जब हम n विमाओं (dimensions) पर एक बिन्दु x, जिसके निर्देशांक $(x_1,..., x_n)$ हैं, और कभी न बदलने वाले एक l पर, जिसके निर्देशांक $(l_1, ... l_n)$ हैं, विचार करें। बिन्दु-निर्देशांकों के रूपांतरण $x=AX$ से, स्पर्शरेखीय-निर्देशांकों के रूपांतरण $L=A'l$ में कोई परिवर्तन नहीं होता।

6.2. प्रतिरूपांतरी समुच्चयों का दूसरा उदाहरण, जिसमें एक विशेष स्थिति में पहले वाला भी आ जाता है, अवकल संकारकों (differential operators) के अध्ययन में मिलता है। मान लीजिए, $F(x_1,...,x_n)$ को, रूपांतरण $x=AX$, के जरिए $X_1,..., X_n$ के एक फलन (function) के रूप में, व्यक्त किया जाता है, जहाँ A, मैट्रिक्स $[a_{ij}]$ को प्रकट करता है। तो,

$$\frac{\partial F}{\partial X_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_j}\,\frac{\partial x_j}{\partial X_i}=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\,\frac{\partial F}{\partial x_j}.$$

दूसरे शब्दों में, मैट्रिक्स के रूप में, यदि $x=AX$ हो तो,

$$\frac{\partial}{\partial X}=A'\frac{\partial}{\partial x}$$

फलस्वरूप, x_i और $\frac{\partial}{\partial x_i}$ से प्रतिरूपांतरी समुच्चय बनते हैं।

7. किसी रूपांतरण का अभिलक्षण-समीकरण

7.1. रूपांतरण $X=Ax$, या इसके पूरे रूप,

$$X_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_j\quad(i=1,\ldots,n).\tag{1}$$

को देखिये।

क्या x चरों के ऐसे मान संभव है कि $X_i=\lambda x_i$ $(i=1,...,n)$, जहाँ λ, i से स्वतंत्र है? यदि ऐसा परिणाम संभव है तो,

$$\lambda x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_j\quad(i=1,\ldots,n)\tag{2}$$

होना चाहिए, और इसके लिए यह आवश्यक (प्रमेय 11) है कि, जब $x_1..., x_n$ म से एक शून्य से भिन्न हो, तो λ, समीकरण

$$A(\lambda)\equiv\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0\tag{3}$$

का एकमूल होगा।

इस समीकरण को रूपांतरण (1) का **अभिलक्षण-समीकरण** कहते है; समीकरण के प्रत्येक मूल को, रूपांतरण की एक **अभिलक्षणिक संख्या** (CHARACTERISTIC NUMBER) या एक **अभिलक्षणिक मूल** (LATENT ROOT) कहते है।

यदि λ एक अभिलक्षणिक संख्या है, तो $x_1,...,x_n$ संख्याओं, जिनमें सभी शून्य नहीं (प्रमेय 11) हैं, का एक समुच्चय ऐसा होना चाहिए कि उससे (2) के समीकरण संतुष्ट हो जाएँ। मान लीजिए, $\lambda=\lambda_1$ एक अभिलक्षणिक संख्या है। यदि डिटर्मिनेंट $A(\lambda_1)$

का क्रम $(n-1)$ है तो अनुपातों (ratios) का एक अद्‌वितीय संगत समुच्चय, मान लीजिए,

$$x_1^{(1)} : x_2^{(1)} : \quad .. \quad x_n^{(1)}$$

इस प्रकार का अवश्य होगा जिससे (2) संतुष्ट हो जाएँ। यदि डिटर्मिनेन्ट $A(\lambda_1)$ का क्रम $n-2$ या कम है तो अनुपातों का समुच्चय अद्‌वितीय नहीं होगा (दे॰ आठवाँ अध्याय, §5)।

अनुपातों का एक ऐसा समुच्चय जो (2) को तब सतुष्ट करे जब λ एक अभिलक्षणिक संख्या λ_r के बरावर हो, λ_r का एक संगत ध्रुव (POLE CORRESPONDING TO λ_r) कहलाता है।

7.2. यदि (x_1, x_2, x_3) और (X_1, X_2, X_3) एक समतल में एक दिए हुए निदश-त्रिभुज के संदर्भ में समघात निर्देशांक हों, तो (1) को, $|A| \neq 0$ होने पर, चर बिन्दु (x_1, x_2, x_3) और चर बिन्दु (X_1, X_2, X_3) के बीच एक एकैक संगति (One-to-one correspondence) लाने वाली या पैदा करने वाली रीति की तरह माना जा सकता है। रूपांतरण का ध्रुव तव एक ऐसा बिन्दु हो जाता है जो स्वयं अपना ही संगत होता है।

इस प्रकार के रूपांतरणों में निहित ज्यामिति की† हम विस्तृत चर्चा नहीं करेंगे; कुछ उदाहरण आगे दिए जाएँगे।

प्रश्नावली दस

1. सिद्ध कीजिए कि $a+b\sqrt{3}$ की तरह की समस्त संख्याएँ, जहाँ a और b पूर्णांक (या शून्य) हैं, एक रिंग बनाती हैं; और यह कि $a+b\sqrt{3}$ की तरह की समस्त संख्याएँ, जहाँ a और b पूर्णांकों के अनुपात (या शून्य) हैं, एक फील्ड बनाती हैं।
2. $ax^2+2hxy+by^2$ को एक द्‌विघाती समघात के रूप में (§ 2.1 की परिभाषा के अनुरूप) व्यक्त कीजिए और यह दिखाइए कि उसका विवेचक $ab-h^2$ है (§ 2.6)।
3. उस रूपांतरण को ज्ञात कीजिए जो निम्नलिखित दो रूपांतरणों का गुणनफल है—

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1\xi+m_1\eta+n_1\zeta \\ y &= l_2\xi+m_2\eta+n_2\zeta \\ z &= l_3\xi+m_3\eta+n_3\zeta \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} \xi &= \lambda_1X+\mu_1Y+\nu_1z \\ \eta &= \lambda_2X+\mu_2Y+\nu_2z \\ \zeta &= \lambda_3X+\mu_3Y+\nu_3z \end{aligned}\right\}$$

†दे॰ आर॰ एम॰ विंगर, **एन इंट्रोडक्शन टु प्रोजेक्टिव ज्योमेट्री** (न्यूयार्क, 1922), या, तीन विमाओं में समघाती निर्देशकों के लिए, जो॰ डरबाक्स, **प्रिंसपी वी ज्यामित्री एनेलितीक** (गॉथ्यर—विलार्स, पेरिस, 1917)

4. सिद्ध कीजिए कि, ठोस ज्यामिति में, यदि $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ और $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{k}_2$ कार्तीय (cartesian) निर्देशांकों के लिए निर्देश के दो इकाई ढांचे (unit frames) हों और यदि $r=1, 2$, होने पर

$$\mathbf{i}_r \wedge \mathbf{j}_r=\mathbf{k}_r, \mathbf{j}_r \wedge \mathbf{k}_r=\mathbf{i}_r, \mathbf{k}_r \wedge \mathbf{i}_r=\mathbf{j}_r,$$

हो तो निर्देशांकों के रूपांतरण का मापांक इकाई होता है।

[यदि वैक्टर संकेतन (vector notation) ज्ञात न हो तो छोड़ दीजिए।]

5. एक तरफ वास्तव में प्रतिस्थापन (Substitution) करके और दूसरी तरफ मैट्रिक्स गुणनफल (प्रमेय का $B'AB$) का मान ज्ञात करके उस परिस्थिति में प्रमेय 37 की जाँच कीजिए, जब मूल द्विघाती समघात,

$$ax^2+2hxy+by^2$$

हो और रूपांतरण $x=l_1X+m_1Y$, $y=l_2X+m_2Y$ हो।

6. प्रश्न 5 के तरीके से, प्रमेय 38 की जाँच कीजिए, जब द्विएकघाती-समघात यों है :—

$$a_{11}x_1y_1+a_{12}x_1y_2+a_{21}x_2y_1+a_{22}x_2y_2.$$

7. ABC को निर्देश-त्रिभुज मान करके, D,E,F बिन्दुओं के समघाती निर्देशांक क्रमशः (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) और (x_3,y_3,z_3) हैं। सिद्ध कीजिए, कि यदि ABC के निर्देश में रेखा-निर्देशांक (l, m, n) और DEF के निर्देश में रेखा-निर्देशांक (L,M,N) हों, तो

$$\triangle l=X_1L+X_2M+X_3N, \text{ आदि-आदि}$$

जहाँ $\triangle$, डिटर्मिनेन्ट $|x_1y_2,z_3|$ है और X_r,...आदि $\triangle$ में x_r,... आदि के सह-खण्ड हैं।

सुझाव :—पहले रूपांतरण $x,y,z \rightarrow X,Y,Z$ को प्राप्त कीजिए और फिर §6.1 का उपयोग कीजिए।

8. रूपांतरण $X=Ax$ में, दो नए चर Y और y को लाया जाना है जो इस प्रकार दिए गए हैं :—

$$y=Bx, \quad Y=BX \quad (|B| \neq 0),$$

सिद्ध कीजिए कि रूपान्तरण $Y \rightarrow y$ इस प्रकार दिया जा सकता है—

$$Y=Cy, \text{ जहाँ } C=BAB^{-1}$$

9. रूपांतरण $x=BX$, $y=\bar{B}Y$ से हर्मिटीय† $a_{ij}x_iy_j$ $(A'=\bar{A}$ से) का रूप $C_{ij}X_iY_j$ हो जाता है। सिद्ध कीजिए कि—

$$C=B'A\bar{B}, \quad C'=\bar{B}'A'B=\bar{C}.$$

10. सिद्ध कीजिए कि रूपांतरण $x=BX$, अपने संयुग्मी संमिश्र $\bar{x}=\bar{B}\bar{X}$ के साथ, $a_{ij}x_i\bar{x}_j$ $(A'=\bar{A})$ को $C_{ij}X_i\bar{X}_j$ $(C'=\bar{C})$ में बदल देता है, जहाँ $C=B'A\bar{B}$ है।

---

†9, 10 और 12 प्रश्नों में संकलन परिपाटी का उपयोग है।

11. मैट्रिक्स A और B के अवयव एक दिए हुए फील्ड £ में समाविष्ट हैं। सिद्ध कीजिए कि यदि द्विघाती समघात $A(x,x)$, व्युत्क्रमणीय रूपांतरण $x=BX$ (या $X=Bx$ से) से $C(X,X)$ में रूपांतरित हो जाए तो C के प्रत्येक गुणांक भी ℱ में समाविष्ट होंगे।

12. सिद्ध कीजिए कि यदि प्रत्येक x_r एक संमिश्र चर को प्रकट करता है और a_{rs} इस प्रकार की संमिश्र संख्याएँ है कि $a_{rs}=\bar{a}_{sr}$ $(r=1, ..., n; s=1, ..., n)$, तो हर्मिटीय समघात $a_{rs}x_r\bar{x}_s$ एक वास्तविक संख्या होगा।

[प्रश्न 13–16 ज्यामिति की दृष्टि से महत्वपूर्ण हैं।]

13. यदि एक समतल में कुछ विंदुओं का रूपांतरण निम्नलिखित विधि से किया जाए तो सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक सरल (straight) रेखा का रूपांतरण एक सरल रेखा में ही होता है।

$$x'=a_1x+b_1y+c_1z,$$
$$y'=a_2x+b_2y+c_2z,$$
$$z'=a_3x+b_3y+c_3z,$$

यह भी सिद्ध कीजिए कि सामान्यतया तीन बिंदु ऐसे होते हैं जो स्वयं में ही रूपांतरित हो जाते हैं और तीन ही रेखाएँ सामान्यतया स्वयं में रूपांतरित हो जाती हैं।

गुणांकों से संतुष्ट हो सकने वाले उन प्रतिबंधों को ज्ञात कीजिए कि किसी दी हुई रेखा का प्रत्येक बिंदु स्वयं में ही रूपांतरित हो सके।

14. सिद्ध कीजिए कि प्रश्न 13 का रूपांतरण, निर्देश-त्रिभुज के परिवर्तन से, सामान्यतया, इस रूप में लाया जा सकता है—

$$X'=\alpha X, \quad Y'=\beta Y, \quad Z'=\gamma Z.$$

इस प्रकार, या किसी दूसरी विधि से, यह दिखाइए कि रूपांतरण रचना-सादृश्य (homology) वाला (समतल संदर्श, संरेखता) [(plane perspective, collineation)], होगा यदि λ का कोई ऐसा मान हो जो

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2-\lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3-\lambda \end{vmatrix}$$

को एक क्रम वाला करदे।

संकेत—जब डिटरमिनेन्ट का क्रम एक होगा तो एक रेखा l इस प्रकार की होगी कि उसका प्रत्येक बिंदु स्वयं का ही संगत हो। ऐसी स्थिति में कोई दो संगत रेखाएँ l में कटेंगी।

15. उन समीकरणों को ज्ञात कीजिए, जो दो विमाओं में, उस रचना-सादृश्य (संरेखता, समतल संदर्श) को प्रकट करें जिसमें बिन्दु (x_1', y_1', z_1') केंद्र है और रेखा (l_1', l_2', l_3') रचना-सादृश्य का अक्ष है।

16. एक समतल में बिन्दुओं का निम्नलिखित से रूपांतरण किया गया है :—

$$x'=\rho x+\alpha(\lambda x+\mu y+\nu z),$$
$$y'=\rho y+\beta(\lambda x+\mu y+\nu z),$$
$$z'=\rho z+\gamma(\lambda x+\mu y+\nu z).$$

उन बिन्दुओं और रेखाओं को ज्ञात कीजिये जो स्वयं में ही रूपांतरित हो जाते हैं ।

यह भी दिखाइए कि रूपांतरण **अन्तर्वलित** (involutory) [अर्थात् उसके दो अनुप्रयोगों से आकृति अपनी मूल स्थिति में आ जाती है ।] होगा यदि और केवल यदि $2\rho+\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu=0$ हो ।

[स्मरण रखिए कि (kx',ky',kz') वही बिन्दु है जो (x',y',z') है ।]

11 अध्याय

धनात्मक-निश्चित समघात

(The Positive-Definite Form)

1. निश्चित वांस्तविक समघात

1.1. परिभाषा 6—वास्तविक द्विघाती समघात

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \ (a_{ij}=a_{ji})$$

को धनात्मक निश्चित कहते हैं यदि वह समुच्चय $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ के अलावा, $x_1,\ldots,x_n$ के वास्तविक मानों के, प्रत्येक समुच्चय के लिए धनात्मक हो । इसको ऋणात्मक-निश्चित कहते हैं यदि वह $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ के अलावा $x_1,\ldots,x_n$ के वास्तविक मानों के प्रत्येक समचचय के लिए ऋणात्मक हो ।

उदाहरण के लिए, $3x_1^2+2x_2^2$ धनात्मक-निश्चित है जबकि $3x_1^2-2x_2^2$ धनात्मक-निश्चित नहीं है; पहला $x_1=0, x_2=0$ के अलावा, x_1 और x_2 के वास्तविक मानों के, प्रत्येक युग्म (pair) के लिए धनात्मक है; दूसरा तब धनात्मक है जब $x_1=x_2=1$ लेकिन ऋणात्मक है जब $x_1=1$, और $x_2=2$, और शून्य है जब $x_1=\sqrt{2}$ और $x_2=\sqrt{3}$ हैं ।

वास्तविक समघात का एक ऐसा उदाहरण जो कभी ऋणात्मक नहीं हो सकता, लेकिन परिभाषा के अनुसार धनात्मक-निश्चित भी नहीं है, यों है—

$$(3x_1-2x_2)^2+4x_3^2.$$

यह द्विघाती समघात शून्य हो जाता है जब $x_1=2, x_2=3$, और $x_3=0$, और इसलिए यह परिभाषा 6 के अंतर्गत नहीं आता। परिभाषा की सीमा में इस प्रकार के समघात को शामिल न करने का कारण यह है कि यद्यपि यह फलन x_1,x_2,x_3 तीन चरों का-सा प्रतीत होता है यह वास्तव में दो ही चरों का फलन है जो यों है :—

$$X_1=3x_1-2x_2,\ X_2=x_3$$

चरों के एक समुच्चय में किसी धनात्मक-निश्चित समघात को यदि चरों के एक नए समुच्चय में व्यक्त किया जाए तब भी वह एक धनात्मक-निश्चित समघात ही रहता है, शर्त केवल यह है कि दोनों समुच्चय, एक वास्तविक व्युत्क्रमणीय रूपांतरण द्वारा संबद्ध हों। इसे हम अब सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 40— $x_1,\ldots,x_n$ आदि n चरों में एक वास्तविक धनात्मक-निश्चित समघात, $X_1,\ldots,X_n$ आदि n चरों में भी एक धनात्मक-निश्चित समघात होगा बशर्ते कि चरों के दोनों समुच्चय, एक वास्तविक, व्युत्क्रमणीय रूपांतरण द्वारा संबद्ध हों।

मान लीजिए, धनात्मक-विश्चित समघात $B(x,x)$, और वास्तविक व्युत्क्रमणीय रूपांतरण $X=Ax$ है। तो $x=A^{-1}X$. मान लीजिए, $B(x,x)$ जब X के पदों में व्यक्त किया जाए तो वह $C(X,X)$ हो जाता है।

चूँकि $B(x,x)$ धनात्मक-निश्चित है, $C(X,X)$, $x=0$ के संगत X के अलावा है, प्रत्येक X के लिए धनात्मक होगा। लेकिन, $X=Ax$, जहाँ A एक व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स है और इसलिए $X=0$ होगा यदि और केवल यदि $x=0$ है। अतएव $C(X,X)$, $X=0$ के अलावा प्रत्येक X के लिए धनात्मक होगा।

टिप्पणी—समीकरण $x=0$ एक मैट्रिक्स समीकरण है, जहाँ x ऐसा एकस्तंभीय मैट्रिक्स है जिसके अवयव $x_1,\ldots,x_n$ हैं।

1.2. n चरों में धनात्मक-निश्चित समघात का सबसे अधिक सुव्यक्त रूप यों है—

$$a_{11}x_1^2+\ldots+a_{nn}x_n^2\ (a_{rr}>0).$$

अब हम यह दिखाएँगे कि n चरों में कोई भी धनात्मक-निश्चित समघात इस सुव्यक्त रूप का ही एक रूपांतरण होता है।

प्रमेय 41— प्रत्येक वास्तविक धनात्मक-निश्चित समघात $B(x,x)$ को इकाई मापांक (unit modulus) के एक वास्तविक रूपांतरण द्वारा समघात

$$c_{11}X_1^2+\ldots+c_{nn}X_n^2$$

के रूप म लाया जा सकता है जहाँ प्रत्येक c_{rr} धनात्मक है।

जो तरीके हम यहाँ प्रयोग में लाएँगे वह पुस्तक में आगे दिए जाने वाले तरीकों की तरह हैं। यहाँ हम उनका विस्तृत विवेचन करेंगे; बाद में यहीं का हवाला दे देंगे और स्पष्टता को कम किए विना जितना हो सकेगा उतने विवरण को संक्षिप्त कर देंगे।

मान लीजिए, दिया हुआ धनात्मक-निश्चित समघात यों है :—

$$B(x,x)\equiv\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_ix_j\ (b_{ij}=b_{ji})$$

$$\equiv\sum^{n}b_{rr}x_r^2+2\sum_{r<s}^{n}{}_{r=1}\,b_{rs}x_rx_s. \qquad (1)$$

(1) के वे पद जिनमें x_1 आता है इस प्रकार है :—

$$b_{11}x_1^2+2b_{12}x_1x_2+\ldots+2b_{1n}x_1x_n. \qquad (2)$$

इसके अतिरिक्त, चूँकि (1) धनात्मक-निश्चित है, यह तब धनात्मक होगा जब $x_1=1$ और $x_2=\ldots=x_n=0$ हो; अतएव $b_{11}>0$ होगा। फलस्वरूप (2) के पदों को ऐसे लिख सकते हैं †—

$$b_{11}\left(x_1+\frac{b_{12}}{b_{11}}x_2+\ldots+\frac{b_{1n}}{b_{11}}x_n\right)^2-\frac{1}{b_{11}}(b_{12}x_2+\ldots+b_{1n}x_n)^2,$$

और इसलिए, यदि

$$\left.\begin{aligned} X_1&=x_1+\frac{b_{12}}{b_{11}}x_2+\ldots+\frac{b_{1n}}{b_{11}}x_n,\\ X_r&=x_1(r=2,\ldots,n),\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

तो $B(x,x)=b_{11}X_1^2+X_2,\ldots,X_n$ में एक द्विघाती समघात

$$=(\text{मान लीजिए})\qquad b_{11}X_1^2+\sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n}\beta_{rs}X_rX_s, \tag{4}$$

रूपांतरण (3) व्युत्क्रमणीय है, इसका डिटर्मिनेंट यों है—

$$\begin{vmatrix} 1 & b_{12}/b_{11} & . & . & b_{1n}/b_{11}\\ 0 & 1 & . & . & 0\\ . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & . & . & 1\end{vmatrix}=1.$$

अतएव, (दे० प्रमेय 40) X में समघात (4), धनात्मक-निश्चित है और $\beta_{22}>0$ ($X_2=1$, $X_r=0$ रखिए जब $r\neq 2$ हो।)

जैसे पहले कर चुके हैं वैसे ही—

$$B(x,x)=b_{11}X_1^2+\beta_{22}\left(X_2+\frac{\beta_{23}}{\beta_{22}}X_3+\ldots+\frac{\beta_{2n}}{\beta_{22}}X_n\right)^2+X_3,\ldots,X_n$$ में एक द्विघाती समघात।

मान लीजिए, $X_3,\ldots,X_n$ में यह द्विघाती समघात, $\Sigma\Sigma\gamma_{rs}X_rX_s$ है; तब,

$$\left.\begin{aligned} Y_1&=X_1,\\ Y_2&=X_2+\frac{\beta_{23}}{\beta_{22}}X_3+\ldots+\frac{\beta_{2n}}{\beta_{22}}X_n,\\ Y_r&=X_r\ (r=3,\ldots,n),\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

लिखने पर हम देखते हैं—

$$B(x,x)=b_{11}Y_1^2+\beta_{22}Y_2^2+\sum_{r=3}^{n}\sum_{s=3}^{n}\gamma_{rs}Y_rY_s. \tag{6}$$

---

†इसके लिए यह आवश्यक है कि b_{11} शून्य न हो।

रूपांतरण (5) इकाई मापांक का है और इसलिए, समघात (4) में प्रमेय 40 के लागू करने से, समघात (6) धनात्मक-निश्चित है और $\gamma_{33}' > 0$ ($Y_3 = 1$, $Y_r = 0$ रखिए जब $r \neq 3$ हो।)

जैसा पहले किया है वैसे ही दूसरा समघात इस रूप में आता है—

$b_{11}Z_1^2 + \beta_{22}Z_2^2 + \gamma_{33}Z_3^2 + Z_4, \ldots, Z_n$ में एक द्विघाती समघात, (7)

जहाँ b_{11}, β_{22}, γ_{33} धनात्मक हैं। अगले कदम की तैयारी में, (7) को धनात्मक-निश्चित समघात सिद्ध करके, Z_4^2 का गुणांक, धनात्मक सिद्ध किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त, हमारे पास,

$$Z_1 = Y_1 = X_1 = x_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}}x_2 + \ldots + \frac{b_{1n}}{b_{11}}x_n,$$

$$Z_2 = Y_2 = x_2 + \frac{\beta_{23}}{\beta_{22}}x_3 + \ldots + \frac{\beta_{2n}}{\beta_{22}}x_n,$$

$$Z_3 = x_3 + \frac{\gamma_{34}}{\gamma_{33}}x_4 + \ldots + \frac{\gamma_{3n}}{\gamma_{33}}x_n,$$

$$Z_r = Y_r = X_r = x_r \quad (r > 3).$$

इसी प्रकार एक-एक करके हमें अन्ततः यह रूप मिलता है—

$$B(x,x) = b_{11}\xi_1^2 + \beta_{22}\xi_2^2 + \lambda_{33}\xi_3^2 + \ldots + \kappa_{nn}\xi_n^2. \tag{8}$$

जहाँ $b_{11}, \ldots, \kappa_{nn}$ धनात्मक हैं और

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1 = x_1 + \frac{b_{12}}{b_{11}}x_2 + \ldots + \frac{b_{1n}}{b_{11}}x_n, \\ \xi_2 = \quad\quad x_2 + \ldots + \frac{\beta_{2n}}{\beta_{22}}x_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \xi_n = \quad\quad\quad\quad\quad x_n. \end{array}\right\} \tag{9}$$

इस प्रकार $B(x,x)$ का हमने (8) में रूपांतरण कर दिया है, जो उसी रूप में है जैसा प्रमेय से वांछित है; इसके अतिरिक्त, रूपांतरण $x \leftrightarrow \xi$ वही है जो (9) है कि जो इकाई मापांक का है।

2. एक धनात्मक-निश्चित समघात के लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध

2.1. प्रमेय 42—वास्तविक द्विघाती समघात

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij} = a_{ji}) \tag{1}$$

के धनात्मक-निश्चित होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंधों का एक समुच्चय इस प्रकार है—

$$a_{11}>0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

यदि समघात धनात्मक-निश्चित है, तो, §1.2 की तरह, एक रूपांतरण

$$X_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n,$$

$$X_2 = \qquad x_2 + \ldots + \frac{\beta_{2n}}{\beta_{22}}x_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$X_n = \qquad\qquad x_n,$$

इकाई मापांक का ऐसा होगा कि समघात का रूपांतर यों हो सके—

$$a_{11}X_1^2 + \beta_{22}X_2^2 + \ldots + \kappa_{nn}X_n^2, \tag{2}$$

और इस समघात में $a_{11}, \beta_{22}, \ldots, \kappa_{nn}$ आदि सब धनात्मक हैं। समघात (2) का विवेचक $a_{11}\,\beta_{22}\ldots\kappa_{nn}$ है। अतएव, प्रमेय 39 से,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\beta_{22}\ldots\kappa_{nn},$$

और इसलिए धनात्मक है।

अब (1) पर तब विचार कीजिए जब $x_n \equiv 0$ हो तो पहले वाले ही तर्क को, $x_1,\ldots,x_{n-1}$ आदि $n-1$ चरों वाले एक समघात में लागू करने पर,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1,n-1} \\ . & . & . & . \\ a_{n-1,1} & . & . & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = a_{11}\beta_{22}\ldots n-1 \text{ पदों तक}$$

और इसलिए धनात्मक है।

इसी प्रकार, $x_n \equiv 0$ और $x_{n-1} \equiv 0$ रखने पर,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1,n-2} \\ . & . & . & . \\ a_{n-2,1} & . & . & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix} = a_{11}\beta_{22}\ldots n-2 \text{ पदों तक}$$

आदि-आदि। अतएव, प्रतिबंधों का दिया हुआ समुच्चय आवश्यक है।

विलोमतः, यदि प्रतिबंधों का समुच्चय लागू होता है, तो, एक तो $a_{11} > 0$ होगा और हम, §1.2 की तरह, इस प्रकार लिख सकते है :—

$A(x,x) = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + x_2, \ldots x_n$ में एक द्विघाती समघात (मान लीजिए)

$$= a_{11}X_1^2 + \beta_{22}X_2^2 + \ldots + \beta_{nn}X_n^2 + 2\beta_{23}X_2X_3 + \ldots (3)$$

जहाँ
$$X_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n,$$
$$X_k = x_k \; (k > 1)$$

इससे पहले कि हम आगे चलें हमको यह सिद्ध करना चाहिए कि β_{22} धनात्मक है।

समघात और रूपांतरण पर विचार कीजिए जब $k > 2$ के लिए $x_k \equiv 0$ हो।

तब समघात (3) का विवेचक $a_{11}\beta_{22}$, रूपांतरण का मापांक इकाई होगा और
$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$
का विवेचक $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ होगा। अतएव, x_1 और x_2 केवल दो चरों के एक समघात में प्रमेय 39 के अनुप्रयोग से,
$$a_{11}\beta_{22} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$
और इसलिए परिकल्पना से धनात्मक है। अतएव β_{22} धनात्मक है और हम (3) को इस प्रकार लिख सकते हैं –

$a_{11}Y_1^2 + \beta_{22}Y_2^2 + Y_3, \ldots, Y_n$ में एक द्विघाती समघात

जहाँ
$$Y_1 = X_1,$$
$$Y_2 = X_2 + \frac{\beta_{23}}{\beta_{22}}X_3 + \ldots + \frac{\beta_2}{\beta_{22}}X_n,$$
$$Y_k = X_k \quad (k > 2)$$

अर्थात्, हम इस प्रकार लिख सकते हैं :—
$$A(x,x) = a_{11}Y_1^2 + \beta_{22}Y_2^2 + \gamma_{33}Y_3^2 + \ldots + 2\gamma_{34}Y_3Y_4 + \ldots, \qquad (4)$$
जहाँ a_{11} और β_{22} धनात्मक हैं।

समघात (3), (4) पर, और X से Y में रूपांतरण पर विचार कीजिए जब $k > 3$ के लिए $x_k \equiv 0$ हो। (4) का विवेचक $a_{11}\beta_{22}\gamma_{33}$, रूपांतरण का मापांक इकाई और (3) का विवेचक
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

है जो परिकल्पना से धनात्मक है। अतएव, केवल तीन चर x_1x_2,x_3 के एक समघात पर प्रमेय 39 के अनुप्रयोग से, गुणनफल $a_{11}\beta_{22}\gamma_{33}$, डिटर्मिनेंट (5) के बराबर है और इसलिए धनात्मक है। फलस्वरूप, γ_{33} धनात्मक है।

इस प्रकार धीरे-धीरे हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि जब प्रतिबंधों का समुच्चय संतुष्ट हो तो हम $A(x,x)$ को

$$a_{11}X_1^2+\beta_{22}X_2^2+\ldots+k_{nn}X_n^2, \tag{6}$$

के रूप में लिख सकते हैं जहाँ $a_{11},\beta_{22},\ldots,k_{nn}$ धनात्मक हैं और

$$\left.\begin{array}{l} X_1=x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\ldots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n, \\ X_2=\qquad x_2+\ldots+\frac{\beta_{2n}}{\beta_{22}}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n=\qquad\qquad x_n \end{array}\right\} \tag{7}$$

समघात (6), $X_1,\ldots,X_n$ में धनात्मक-निश्चित है और, चूँकि रूपांतरण (7) व्युत्क्रमणीय है, $A(x,x)$ (दे० प्रमेय 40) $x_1,\ldots,x_n$ में धनात्मक निश्चित होगा।

2.2. हमने चरों को $x_1,x_2,\ldots,x_n$ के क्रम में रखकर और फिर a_{11} से शुरू करके विचार-विमर्श आरंभ किया था। हम ऐसा भी कर सकते थे कि चरों का क्रम $x_n, x_{n-1},\ldots,x_1$ रखते और a_{nn} से शुरू करते। उस परिस्थिति में हमें आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंधों का एक दूसरा समुच्चय प्राप्त होता, जो यों होता,

$$a_{nn}>0,\ \begin{vmatrix} a_{n,n} & a_{n,\,n-1} \\ a_{n-1,n} & a_{n1,\,n-1} \end{vmatrix}>0,\ \ldots$$

इसी प्रकार, चरों के क्रम में किसी भी क्रमचय (permutation) से आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंधों का एक समुच्चय प्राप्त होगा।

2.3. समघात $A(x,x)$ ऋणात्मक-निश्चित होगा यदि समघात $\{-A(x,x)\}$ धनात्मक-निश्चित है। फलस्वरूप, समघात $A(x,x)$ ऋणात्मक-निश्चित होगा यदि और केवल यदि—

$$a_{11}<0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}<0,\ \ldots$$

हो।

प्रश्नावली ग्यारह

1. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित द्विघाती समघातों में से (i) और (ii) धनात्मक-निश्चित हैं लेकिन (iii) नहीं।

(i) $6x^2+35y^2+11z^2+34yz,$

(ii) $6x^2+49y^2+51z^2-82yz+20zx-4xy,$

(iii) $4x^2+9y^2+2z^2+8yz+6zx+6xy$

2. सिद्ध कीजिए कि यदि—

$$F \equiv \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} a_{rs}x_r x_s \; (a_{rs}=a_{sr})$$

एक धनात्मक-निश्चित समघात है, तो

$$a_{11}F=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)^2+K(x_2,x_3),$$

जहाँ K वास्तव में x_2, x_3 में एक धनात्मक-निश्चित समघात है जिसका विवेचक, F के विवेचक का a_{11} गुना है।

सुझाव—रूपांतरण $X_1=a_{11}\;x_1+a_{12}\;x_2+a_{13}x_3,$
$X_2=x_2,\; X_3=x_3$ का और प्रमेय 39 का उपयोग कीजिए !

3. सिद्ध कीजिए कि x,y,z में द्विघाती समघात

$$F\equiv(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2$$

का विवेचक, उस डिटर्मिनेंट का (पंक्तियों से) वर्ग है जिसके स्तंभ यों हैं —

$$a_1,b_1,c_1;\; a_2,b_2,c_2;\; 0,0,0$$

4. (प्रश्न 3 का विस्तार) सिद्ध कीजिए कि n चरों में r विभिन्न एकघाती समघातों के वर्गों का योग, n चरों एक ऐसा द्विघाती समघात होता है जिसका विवेचक शून्य होता है जब भी $r<n$ हो।

5. (कुछ कठिन) यह भी सिद्ध कीजिए कि इस प्रकार के विवेचक का क्रम सामान्यतया, r के बराबर होता है : और यह कि इस सामान्य नियम का अपवाद तभी होता है जब r विभिन्न समघात, एकघाततः स्वतंत्र न हों।

6. सिद्ध कीजिए कि

$$F=\sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{n} a_{sr}\;x_s\right)^2$$

का विवेचक तब तक शून्य नहीं होता जब तक समघात

$$\sum_{s=1}^{n} a_{sr}\;x_s\;(r=1,\ldots,n)$$

एकघाततः आश्रित न हों ।

सुझाव— प्रश्न 3 और 4 से तुलना कीजिए ।

7. सिद्ध कीजिए कि द्विघाती समघात

$$\sum_{r \neq s} (x_r - x_s)^2 \quad (r,\ s=1,..,n)$$

के विवेचक का क्रम $n-1$ है ।

8. $f(x_1,..,x_n)$ यदि n चरों का एक फलन हो, f_i, $\partial f/\partial x_i$ को प्रकट करता हो, और f_{ij}, $x_r=\alpha_r (r=1, ..,n)$ के मानों पर $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ को प्रकट करता हो तो सिद्ध कीजिए कि f का $x_r=\alpha_r$ पर एक निम्निष्ठ (minimum) होगा बशर्ते कि $\Sigma\ \Sigma\ f_{ij}\ \xi_i\ \xi_j$ एक धनात्मक = निश्चित समघात हो और प्रत्येक fi शून्य हो । उन प्रतिबंधों को ज्ञात कीजिए कि $f(x, y)$, $x=\alpha$, $y=\beta$, बिंदु पर एक निम्निष्ठ हो सके ।

9. दसवें अध्याय के प्रश्न 12 से, चरों के मानों के प्रत्येक समुच्चय के लिए, एक हर्मिटीय समघात का, एक वास्तविक मान होता है । इसको धनात्मक-निश्चित कहते हैं यदि वह मान, $x_1=\cdots=x_n=0$ के अलावा, चरों के मानों के प्रत्येक समुच्चय के लिए धनात्मक हो । एक धनात्मक-निश्चित हर्मिटीय समघात और किसी भी व्युत्क्रमणीय रूपांतरण के लिए प्रमेय 40 को सिद्ध कीजिए ।

10. सिद्ध कीजिए कि इकाई मापांक के एक रूपांतरण द्वारा एक धनात्मक-निश्चित हर्मिटीय समघात को समघात

$$c_{11}X_1\bar{X}_1 + \ldots + c_{nn}X_n\bar{X}_n$$

में रूपांतरित किया जा सकता है जहाँ प्रत्येक c_{rr} धनात्मक है ।

संकेत—प्रमेय 41 की उपपत्ति से तुलना कीजिए ।

11. डिटर्मिनेंट $|A| \equiv |a_{ij}|$ को हर्मिटीय समघात $\Sigma\Sigma a_{ij}\ x_i\ \bar{x}_j$ का विवेचक कहते हैं । यह याद रखते हुए कि एक हर्मिटीय समघात को मैट्रिक्स समीकरण $A^i=\bar{A}$ से

$$|\bar{A}|=|A'|=|A|,$$

पहचाना जाता है, डिटर्मिनेंट-समीकरण पर विचार करके यह स्पष्ट हो जाता है कि विवेचक वास्तविक है ।

हर्मिटीय समघातों के लिए प्रमेय 42 के अनुरूप को सिद्ध कीजिए ।

12. प्रश्न 3 की अनुरूपता पर, सिद्ध कीजिए कि हर्मिटीय समघात $H \equiv X\bar{X}+Y\bar{Y}$ का विवेचक शून्य होता है जहाँ $X=a_1x+b_1y+c_1z$, $Y=a_2x+b_2y+c_2z$ है । प्रश्न 4, 5 और 6 के लिए भी संगत अनुरूप ज्ञात कीजिए ।

अध्याय 12

अभिलक्षण समीकरण और विहित समघात

(The Characteristic equation and Canonical Forms)

1 दो द्विघाती समघातों का λ समीकरण

1.1. प्रमेय 39 में हम देख चुके हैं कि यदि M मापांक के एक रूपांतरण द्वारा x चरों को X चरों में बदला जाए, तो द्विघाती समघात A(x,x) के विवेचक में M^2 से गुणा हो जाता है।

यदि A(x,x) और C(x,x), n चरों में कोई दो भिन्न-भिन्न द्विघाती समघात हों और λ एक स्वेच्छ प्राचल (parameter) हो और यदि चरों में M मापांक का कोई रूपांतरण किया जाए तो समघात $A(x,x)-\lambda C(x,x)$ के विवेचक में भी M^2 से गुणा हो जाता है।

अतएव, यदि रूपांतरण

$$x_i=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ X_j,\ |b_{ij}|=M,$$

द्वारा $\Sigma a_{rs} x_r x_s$, $\Sigma c_{rs} x_r x_s$ का नया रूप $\Sigma \alpha_{rs} X_r X_s$, $\Sigma \gamma_{rs} X_r X_s$, हो जाता है, तो,

$$M^2\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda c_{11} & . & . & a_{1n}-c_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1}-\lambda c_{n1} & . & . & a_{nn}-c_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\gamma_{11} & . & . & \alpha_{1n}-\lambda\gamma_{1n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1}-\lambda\gamma_{n1} & . & . & \alpha_{nn}-\lambda\gamma_{nn} \end{vmatrix}$$

समीकरण $|A-\lambda C=0$ या पूरे रूप में,

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda c_{11} & . & . & . & a_{1n}-\lambda c_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1}-\lambda c_{n1} & . & . & . & a_{nn}-\lambda c_{nn} \end{vmatrix}=0$$

को ऊपर दिए हुए दो समघातों का λ समीकरण कहते हैं।

उपर्युक्त का संक्षेप इस प्रकार है —

प्रमेय 43.—n चारों में किन्हीं दो द्विघाती समघातों के λ समीकरण के मूलों में एक व्युत्क्रमणीय एकघाती रूपांतरण के बाद भी कोई परिवर्तन नहीं होता। प्रत्येक घात $\lambda^r (r=0,1,..,n)$ के गुणांक में रूपांतरण के मापांक के वर्ग से गुणा हो जाता है।

1.2. A(x,x) और समघात $x_1^2+\ldots+x_n^2$ के λ समीकरण को **A का अभिलक्षण समीकरण** कहते हैं। पूरे रूप में, समीकरण यों है—

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdot & & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

इस समीकरण के मूलों को मैट्रिक्स A के **अभिलक्षण मूल** कहते हैं। समीकरण को $|A-\lambda I|=0$ द्वारा प्रकट किया जा सकता है जहाँ I, n कोटि का एकवत् मैट्रिक्स है।

λ से स्वतंत्र पद डिटर्मिनेंट $|a_{ik}|$ होगा, जिसके फलस्वरूप जब $|a_{ik}|\neq 0$ हो; तो अभिलक्षण समीकरण का कोई मूल शून्य नहीं होता। जब $|a_{ik}|=0$ हो, जिसके फलस्वरूप मैट्रिक्स $[a_{ik}]$ का क्रम $r<n$ होता है तो कम से कम एक शून्य अभिलक्षण मूल अवश्य होता है; जैसा सिद्ध किया जाएगा, उस समय n—r शून्य मूल होते हैं।

2. अभिलक्षण मूलों की वास्तविकता

2.1. प्रमेय 44—यदि $[c_{ik}]$, **एक घनात्मक-निश्चित समघात** $C(x, x)$ **का मैट्रिक्स है, और** $[a_{ik}]$ **वास्तविक अवयवों वाला कोई समनित मैट्रिक्स है, तो λ समीकरण**

$$\begin{vmatrix} a_{11}-c_{11}\lambda & a_{12}-c_{1} & \cdot & a_{1n}-c_{1n}\lambda \\ a_{21}-c_{21}\lambda & a_{22}-c_{22}\lambda & \cdot & a_{2n}-c_{2n}\lambda \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}-c_{ni}\gamma & a_{n2}-c_{n2}\lambda & \cdot & a_{nn}-c_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

के सारे मूल वास्तविक होते हैं।

मान लीजिए, समीकरण का कोई मूल λ है। तो डिटर्मिनेन्ट शून्य हो जाता है और (प्रमेय 11 से) $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, संख्याएँ, सब शून्य नहीं, इस प्रकार की होती हैं कि

$$\sum_{s=1}^{n} (a_{rs}-c_{rs}\lambda)Z_s=0 \quad (r=1,\ldots,n);$$

अर्थात् $$\lambda \sum_{s=1}^{n} c_{rs}Z_s=\sum_{s=1}^{n} a_{rs}Z_s (r=1,\ldots,n) \quad (1)$$

(1) के प्रत्येक समीकरण को, $\bar{Z}_r$ से गुणा कीजिए जो Z_r का संयुग्मी संमिश्र है† और परिणामों को जोड़ दीजिए। यदि $Z_r=X_r+iY_r$ हो, जहाँ X_r और Y_r वास्तविक हैं तो हमें दो भिन्न-भिन्न प्रकार के पद प्राप्त होते हैं, जैसे

$$Z_r\bar{Z}_r=(X_r+iY_r)(X_r-iY_r)=X_r^2+Y_r^2,$$

$$Z_r\bar{Z}_s+\bar{Z}_rZ_s=(X_r+iY_r)(X_s-iY_s)+(X_r-iY_r)(X_s+iY_s)$$
$$=2(X_rX_s+Y_rY_s).$$

---

† जब $Z=X+iY$, $\bar{Z}=X-iY$; $i=\sqrt{(-1)}$, X और Y वास्तविक हैं।

अतएव, इस संक्रिया से,

$$\lambda\left\{\sum_{r=1}^{n} C_{rr}(X_r^2+Y_r^2)+2 \sum_{r<s}^{n} c_{rs}(X_rX_s+Y_rY_s)\right\}$$
$$=\left\{\sum_{r=1}^{n} a_{rr}(X_r^2+Y_r^2)+2 \sum_{r<s}^{n} a_{rs}(X_rX_s+Y_rY_s)\right\},$$

या, यदि एक सुस्पष्ट संकेतन का उपयोग किया जाए तो,

$$\lambda\{C(X,X)+C(Y,Y)\}=A(X,X)+A(Y,Y) \qquad (2)$$

चूंकि, परिकल्पना से, $C(x,x)$ धनात्मक-निश्चित है और चूंकि $Z_r=X_r+iY_r$ $(r=1,\ldots,n)$ संख्याएँ सब ही शून्य नहीं हैं, समीकरण (2) में λ का गुणांक धनात्मक होगा। इसके अतिरिक्त, चूंकि प्रत्येक a_{ik} वास्तविक है, (2) का दक्षिण पक्ष वास्तविक होगा और अतएव λ भी अवश्य वास्तविक होना चाहिए।

टिप्पणी—यदि (2) में λ का गुणांक शून्य होता तो (2) से λ की वास्तविकता के बारे में कुछ भी पता नहीं लगता, इसके लिए यह आवश्यक है कि $C(x,x)$ धनात्मक-निश्चित हो।

उपप्रमेय—**यदि $A(x,x)$ और $C(x,x)$ दोनों धनात्मक-निश्चित समघात हैं तो दिए हुए समीकरण का प्रत्येक मूल्य धनात्मक होगा।**

2.2. जब $c_{rr}=1$ और $c_{rs}=0$ $(r\neq s)$ है तो समघात $C(x,x)$, $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$ है और धनात्मक-निश्चित है। इस प्रकार प्रमेय 44 में, एक विशिष्ट स्थिति में, आगे दिया जाने वाला प्रमेय आ जाता है। यह प्रमेय गणित की अनेक शाखाओं में विभिन्न रूपों में लागू होता है।

प्रमेय 45.—**जब $[a_{ik}]$, वास्तविक अवयवों वाला कोई सममित मैट्रिक्स है, तो समीकरण $|A-\lambda I|=0$ का अर्थात्**

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & . & . & a_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (a_{rs}=a_{sr}),$$

का प्रत्येक मूल λ वास्तविक होता है

जब $[a_{ik}]$ एक धनात्मक-निश्चित समघात का मैट्रिक्स हो तो प्रत्येक मूल धनात्मक होता है।

3. विहित समघात

3.1. इस परिच्छेद में हम यह सिद्ध करेंगे कि यदि $A=[a_{ik}]$, n कोटि **और** r क्रम का कोई वर्ग मैट्रिक्स है तो $x_1,\ldots x_n$ चरों से $X_1,\ldots X_n$, में एक व्युत्क्रमणीय रूपांतरण ऐसा होता है जो $A(x,x)$ को

$$g_1X_1^2+\ldots+g_rX_r^2, \qquad (3)$$

में बदल देता है जहाँ $g_1, \ldots, g_r$ शून्य से भिन्न हैं। इसके अतिरिक्त, यह भी सिद्ध किया जाएगा कि, यदि a_{ik} अवयव किसी एक विशेष फील्ड F (जैसे वास्तविक संख्याओं का फील्ड) में हैं तो रूपांतरण के गुणांक भी और परिणामस्वरूप आने वाला g_i भी उसमें होगें। (3) को **विहित समघात** कहा जाता है।

उपपत्ति में पहले यह दिखाना होगा कि कोई भी दिया हुआ द्विघाती समघात, एक ऐसे में रूपांतरित किया जा सकता है जिसमें x_1^2 का गुणांक शून्य से भिन्न है। यह §§3.2. और 3.3 में किया जाएगा।

3.2. **प्रारंभिक रूपांतरण**—दो विशेष प्रकार के रूपांतरणों के उपयोग का हमें प्रायः अवसर मिलेगा।

पहला प्रकार—रूपांतरण

$$x_1 = X_r, \quad x_r = X_1, \quad x_s = X_s \ (s \neq 1, r)$$

व्युत्क्रमणीय है; इसका मापांक −1 है जैसा डिटर्मिनेन्ट को पूरे रूप में लिखने पर तथा पहले और r-वें स्तंभों के विनिमय के बाद देखा जा सकता है। इसके अतिरिक्त, रूपांतरण का प्रत्येक गुणांक या तो 1 या 0, है और इसलिए वह F संख्याओं के प्रत्येक फील्ड में होगा।

यदि द्विघाती समघात $\Sigma\Sigma a_{rs}x_r x_s$ में $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ संख्याओं में से एक शून्य नहीं तो या तो $a_{11} \neq 0$ या पहले प्रकार का कोई उपयुक्त रूपांतरण द्विघाती समघात को $\Sigma\Sigma\, b_{rs}X_r X_s$ में बदल देगा, जहाँ $b_{11} \neq 0$ है।

यदि द्विघाती समघात $\Sigma\Sigma\, a_{rs}x_r x_s$ में समस्त संख्याएँ $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ शून्य हैं लेकिन एक संख्या $a_{rs} (r \neq s)$ शून्य नहीं है, तो पहले प्रकार का कोई उपयुक्त रूपांतरण समघात को $\Sigma\Sigma\, b_{rs}X_r X_s$ में बदल देगा जहाँ प्रत्येक b_{rr} शून्य है लेकिन $b_{12}, \ldots, b_{1n}$ में से एक संख्या शून्य नहीं है।

दूसरा प्रकार— ^{n}चरों में रूपान्तरण

$$x_1 = X_1 + X_s, \; x_s = X_1 - X_s, \; x_t = X_t \ (t \neq s, 1)$$

व्युत्क्रमणीय है। इसका मापांक वह डिटर्मिनेन्ट होता है जिसमें—

(i) पहली पंक्ति में, पहले और s-वें स्तंभों में 1 है और अन्यत्र 0 है।

(ii) s-वीं पंक्ति में, पहले स्तंभ में 1, s-वें में −1 और दूसरे प्रत्येक स्तंभ में 0 है।

(iii) t-वीं पंक्ति में ($t \neq s$, 1) विकर्ण वाले स्थान में 1 और अन्यत्र 0 हैं।

इस डिटर्मिनेन्ट का मान ±2 होगा, इसके साथ-साथ, डिटर्मिनेन्ट का प्रत्येक अवश्य 1, 0 या −1 होगा और अतएव संख्याओं F के प्रत्येक फील्ड में समाविष्ट (belongs to) होगा।

यदि, द्विघाती समघात $\Sigma\Sigma b_{rs}x_rx_s$ में समस्त संख्याएँ $b_{11}, \ldots, b_{nn}$ शून्य हैं, लेकिन एक b_{1s} शून्य नहीं है तो दूसरे प्रकार का कोई उपयुक्त रूपांतरण समघात को $\Sigma\Sigma c_{rs}X_rX_s$ के रूप में व्यक्त कर देगा जहाँ c_{11} शून्य नहीं है ।

3.3. विहित समघातों कि दिशा में प्रथम चरण ।

पीछे दिए गए प्रारंभिक रूपांतरणों की सहायता से हम प्रत्येक द्विघाती समघात को इस प्रकार रूपांतरित कर सकते हैं कि a_{11} शून्य न हो ।

किसी दिए हुए समघात

$$A\ (x, x)=\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{rs}\, x_r\, x_s \quad (a_{rs}=a_{sr}) \qquad (1)$$

पर विचार कीजिए । यदि एक a_{rr} शून्य नहीं है, तो पहले प्रकार के एक रूपांतरण द्वारा (1) एक समघात $B(X, X)$ में इस प्रकार बदल जाता है कि b_{11} शून्य नहीं है ।

यदि प्रत्येक a_{rr} शून्य है लेकिन कम से कम एक a_{rs} शून्य नहीं है तो पहले प्रकार के एक रूपांतरण के बाद दूसरे प्रकार का एक रूपांतरण (1) को एक समघात $C(Y, Y)$ में बदल देता है जिसमें C_{11} शून्य नहीं है । दोनों रूपांतरणों का गुणनफल (1) को सीधे ही $C(Y, Y)$ में बदल देता है और इस रूपांतरण का मापांक ± 2 होगा ।

इन परिणामों के सार को हम एक प्रमेय में कहेंगे ।

प्रमेय 46—प्रत्येक द्विघाती समघात $A\ (x, x)$ जिसके गुणांक एक दिए फिल्ड F में हैं और जिसमें एक a_{rs} शून्य नहीं है, एक व्युत्क्रमणीय रूपांतरण द्वारा, जिसके गुणांक F में हैं, ऐसे समघात $B\ (X, X)$ में रूपांतरित किया जा सकता है जिसका गुणांक b_{11} शून्य नहीं है ।

3.4. मुख्य प्रमेय की उपपत्ति :

परिभाषा 7—किसी द्विघाती समघात का क्रम वही होता है जो उसके गुणांकों के मैट्रिक्स का क्रम होता है ।

प्रमेय 47—n चरों में और r क्रम का एक द्विघाती समघात जिसके गुणांक एक दिए हुए फील्ड F में हैं, ऐसे व्युत्क्रमणीय रूपांतरण द्वारा, जिसके गुणांक F में हैं,

$$\alpha_1X_1^2+\ldots+\alpha_rX_r^2, \qquad (1)$$

समघात में रूपांतरित हो सकता है जहाँ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ संख्याएं F में हैं और उनमें से कोई भी शून्य के बराबर नहीं है ।

मान लीजिए, समघात $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$ है; और A मैट्रिक्स $[a_{ij}]$ को प्रकट

करता है। यदि प्रत्येक a_{ij} शून्य है तो A का क्रम भी शून्य है और हमारे पास सिद्ध करने को कुछ नहीं रह जाता।

यदि एक a_{ij} शून्य नहीं है (दे० प्रमेय 46), तो एक व्युत्क्रमणीय रूपांतरण, जिसके गुणांक F में हैं ऐसा होगा जो A (x, x) को

$$\alpha_1 X_1{}^2 + 2 \sum_{i=2}^{n} \alpha_{1i} X_1 X_i + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} a_{ij} X_i X_j,$$

में बदल देगा जहाँ $\alpha_1 \neq 0$ है।

इसको इस प्रकार लिख सकते हैं :—

$$\alpha_1 \left(X_1 + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_1} X_2 + \dots + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_1} X_n \right)^2 + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} b_{ij} X_i X_j,$$

और निम्नलिखित व्युत्क्रमणीय रूपांतरण, जिसके गुणांक F में हैं,

$$Y_1 = X_1 + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_1} X_2 + \dots + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_1} X_n,$$

$$Y_i = X_i \ (i = 2, \dots, n),$$

की सहायता से हम A(x, x) को

$$\alpha_1 Y_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} b_{ij} Y_i Y_j \qquad (2)$$

के रूप में लिख सकते हैं।

इसके अतिरिक्त, x से सीधे Y में रूपांतरण, अलग-अलग किए गए रूपांतरणों का गुणनफल है; अतएव यह व्युत्क्रमणीय है और इसके गुणांक F में हैं, और प्रत्येक b भी F में हैं।

यदि (2) में प्रत्येक b_{ij} शून्य है, तो (2) समघात (1) में बदल जाता है; क्रम की समस्या की चर्चा हम अंत में करेंगे।

यदि एक b_{ij} शून्य नहीं है, तो हम $n-1$ चरों में समघात $\Sigma \Sigma \; b_{ij} Y_i Y_j$ को उसी प्रकार बदल सकते हैं जैसे हमने अभी-अभी n चरों में मूल समघात को बदला था। इस प्रकार यह दिखाया जा सकता है कि एक व्युत्क्रमणीय रूपांतरण

$$Z_i = \sum_{j=2}^{n} l_{ij} Y_j \quad (i = 2, \dots n,) \qquad (3)$$

ऐसा होता है, जिसके गुणांक F में हैं और जिसकी सहायता से हम

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2} b_{ij} Y_i Y_j = \alpha_2 Z_2^2 + \sum_{i=3}^{n} \sum_{j=3}^{n} c_{ij} Z_i Z_j,$$

लिख सकते हैं जहाँ $\alpha_2 \neq 0$ है।

(3) के समीकरणों और $Y_1=Z_1$ से $Y_1 \ldots, Y_n$ आदि n चरों का $Z_1,\cdots,Z_n$, में एक व्युत्क्रमणीय रूपान्तरण बनता है । अतएव एक व्युत्क्रमणीय रूपांतरण ऐसा होता है, जो अब तक उपयोग किए गए समस्त रूपांतरणों का गुणनफल होता है, जिसके गुणांक F में होते हैं और जो A (x, x) को

$$\alpha_1Z_1^2+\alpha_2Z_2^2+\sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n}c_{ij}\,Z_i\,Z_j\,, \qquad (4)$$

में बदल देता है जहाँ $\alpha_1\neq 0$ और $\alpha_2\neq 0$ हैं, और प्रत्येक c, F में हैं।

इस तरह काम करने पर दो बातों में से एक अवश्य होनी चाहिए । या तो हमें एक समघात

$$\alpha_1X_1^2+\ldots+\alpha_kX_k^2+\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}d_{ij}\,X_i\,X_j, \qquad (5)$$

प्राप्त होता है, जहाँ $k<n$, $\alpha_1\neq 0,\ldots,\alpha_k\neq 0$, लेकिन प्रत्येक $d_{ij}=0$, और इस परिस्थिति में (5) का रूप यों हो जाता है :—

$$\alpha_1X_1^2+\ldots+\alpha_kX_k^2\ (k<n)\,;$$

और या, n चरणों के पश्चात् हमें समघात

$$\alpha_1X_1^2+\ldots+\alpha_nX_n^2$$

प्राप्त होता है ।

इनमें से किसी भी परिस्थिति में हमें अंततः समघात

$$\alpha_1X_1^2+\ldots+\alpha_kX_k^2\ (k\leqslant n) \qquad (6)$$

प्राप्त होता है जो ऐसे रूपांतरणों के गुणनफल द्वारा आता है जिनमें से प्रत्येक व्युत्क्रमणीय है और प्रत्येक के गुणांक F में हैं ।

अभी यह सिद्ध करना शेष है कि (6) में संख्या K मैट्रिक्स A के क्रम, r के बराबर है । मान लीजिए, B उस रूपांतरण को प्रकट करता है जिसके द्वारा A(x,x) समघात

$$\alpha_1X_1^2+\cdots+\alpha_kX_k^2+\sum_{i=k+1}^{n}0.X_i^2 \qquad (7)$$

में बदल जाता है, तो (7) का मैट्रिक्स (प्रमेय 37 से) B′AB है । चूंकि B व्युत्क्रमणीय है तो मैट्रिक्स B′AB का क्रम वही होना चाहिए जो A का है (दे० प्रमेय 34) अर्थात् r होना चाहिए। लेकिन द्विघाती समघात (7) के मैट्रिक्स के मुख्य विकर्ण के पहले k स्थानों में $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ और अन्यत्र शून्य है जिसके फलस्वरूप उसका क्रम k है । अतएव k=r होगा ।

उपप्रमेय 48—A(x,x) यदि n चरों में कोई द्विघाती समघात है जिसके गुणांक एक दिए हुए फील्ड F में हैं, और यदि उसका विवेचक शून्य हैं तो एक व्युत्क्रमणीय रूपांतरण द्वारा जिसके गुणांक F में है वह (अधिक से अधिक$_{n-1}$ चरों के)

एक समघात

$$\alpha_1 X_1^2 + \cdots + \alpha_{n-1} X^2_{n-1}$$

में रूपान्तरित किया जा सकता है जहाँ $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ आदि संख्याएं F में है ।

वास्तव में यह उपप्रमेय स्वयं प्रमेय का ही एक आंशिक रूप से कथन है; चूंकि A (x,x) का विवेचक शून्य है, समघात का क्रम n—1 या उससे से कम होगा। अगले परिच्छेद में उसके सीधे उपयोग की दृष्टि से ही उपप्रमेय की चर्चा की गई है, जहाँ F, वास्तविक संख्याओं का फील्ड है।

4. दो वास्तविक द्विघाती समघातों का युगपत् समानयन

प्रमेय 48—मान लीजिए, A (x,x), C(x,x), n चरों में दो वास्तविक द्विघाती समघात है और C(x,x) धनात्मक-निश्चित है । तो एक वास्तविक, व्युत्क्रमणीय रूपांतरण ऐसा होता है जो दोनों समघातों को

$$\lambda_1 X_1^2 + \ldots + \lambda_n X_n^2, \qquad X_1^2 + \ldots + X_n^2$$

की तरह व्यक्त कर देता है जहाँ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ आदि $|A-\lambda C| = 0$ के मूल हैं और सब वास्तविक हैं ।

$|A-\lambda C| = 0$ के समस्त मूल वास्तविक हैं (दे० प्रमेय 44)। मान लीजिए λ_1 कोई एक मूल है। तो $A(x,x)-\lambda_1 C(x,x)$ एक ऐसा वास्तविक द्विघाती समघात होगा जिसका विवेचक शून्य है और इसलिए (दे० प्रमेय 47 का उपप्रमेय) $x_1, \ldots, x_n$ से $Y_1, \ldots, Y_n$ में एक वास्तविक व्युत्क्रमणीय रूपांतरण ऐसा होगा कि

$$A(x,x)-\lambda_1 C(x,x) = \alpha_2 Y_2^2 + \ldots + \alpha_n Y_n^2,$$

जहाँ समस्त α वास्तविक संख्याएँ हैं।

मान लीजिए, इसी रूपांतरण को C (x,x) में लागू करने पर

$$C(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} Y_i Y_j \qquad (1)$$

आ जाता है। तो किसी स्वेच्छ के λ लिए हम देखते हैं कि—

$$A(x,x)-\lambda C(x,x) = A(x,x)-\lambda_1 C(x,x) + (\lambda_1-\lambda) C(x,x)$$

$$= \sum_{i=2}^{n} \alpha_i Y_i^2 + (\lambda_1-\lambda) \sum_{1=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} Y_i Y_j \qquad (2)$$

चूंकि, C(x,x), x चरों में धनात्मक-निश्चित है, वह Y चरों में भी धनात्मक-निश्चित होगा (दे० प्रमेय 40) । अतएव γ_{11} धनात्मक होगा और हम रूपांतरण

$$Z_1 = Y_1 + \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} Y_2 + \ldots + \frac{\gamma_{1n}}{\gamma_{11}} Y_n,$$

$$Z_s = Y_s \quad (s = 2, \ldots, n)$$

का उपयोग कर सकते हैं और इसकी सहायता से हम (2) को (ग्यारहवाँ अध्याय §, 1.2 से) समघात

$A(x,x) - \lambda C(x,x) = \phi(Z_2,\ldots,Z_n) + (\lambda_1 - \lambda)\{\gamma_{11} Z_1^2 + \psi(Z_2,\ldots,Z_n)\}$

की तरह लिख सकते हैं जहाँ ϕ और ψ दोनों $Z_2,\ldots,Z_n$ में वास्तविक द्विघाती समघात हैं।

चूँकि λ के किसी भी स्वेच्छ मान के लिए यह सही है, हम देखते हैं कि

$$\left.\begin{aligned} A(x,x) &= \lambda_1 \gamma_{11} Z_1^2 + \phi + \lambda_1 \psi = \lambda_1 \gamma_{11} Z_1^2 + \theta, \\ C(x,x) &= \gamma_{11} Z_1^2 + \psi, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

जहाँ θ और ψ दोनों $Z_2,\ldots,Z_n$ में द्विघाती समघातों को प्रकट करते हैं।

यह उन समघातों की दिशा में प्रथम चरण है जिनकी हम स्थापना करना चाहते हैं।

अगला चरण रखने से पहले हम दो बातें देखते हैं :

(i) ψ, $Z_2,\ldots,Z_n$ आदि $n-1$ चरों में एक धनात्मक-निश्चित समघात है; क्योंकि

$$\gamma_{11} Z_1^2 + \psi\ (Z_2,\ldots,Z_n)$$

एक व्युत्क्रमणीय रूपांतरण द्वारा समघात (1) में से प्राप्त होता है जो $Y_1,\ldots,Y_n$ में धनात्मक-निश्चित है।

(ii) $|\theta - \lambda\psi| = 0$ के मूल, और $\lambda = \lambda_1$ से $|A - \lambda C| = 0$ के समस्त मूलों का पता लग जाता है, क्योंकि (3) के समघात, A (x,x) और C(x,x) से एक व्युत्क्रमणीय रूपांतरण द्वारा आए हैं और इसलिए (दे० प्रमेय 43)

$$|(\lambda_1\gamma_{11} - \lambda\gamma_{11})\, Z_1^2 + \theta - \lambda\psi| = 0$$

के मूल अर्थात्

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11}(\lambda_1 - \lambda) & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \theta_{22} - \lambda\psi_{22} & . & . & \theta_{2n} - \lambda\psi_{2n} \\ . & . \quad . \quad . & . & . & . \quad . \quad . \\ 0 & \theta_{n2} - \lambda\psi_{n2} & . & . & \theta_{nn} - \lambda\psi_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

के मूल, $|A - \lambda C| = 0$ के भी मूल होंगे। यदि λ_1, $|A - \lambda C| = 0$ का कोई पुनरावृत्त (repeated) मूल है तो λ_1, $|\theta - \lambda\psi| = 0$ का भी एक मूल है।

इस प्रकार हम, प्रथम चरण में A और C के स्थान पर θ और ψ के उपयोग से, θ और Ψ समानयन इन समघातों में कर सकते हैं ।

$$\left.\begin{aligned}\theta&=\lambda_2\alpha_2U_2^2+\theta'(U_3,\ldots,U_n),\\ \psi&=\alpha_2U_2^2+\phi'(U_3,\ldots,U_n),\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

जहाँ α_2 धनात्मक है, $\lambda_2, | A-\lambda C |$ का एक मूल है और $Z_2,\ldots,Z_n$ तथा $U_2,\ldots,U_n$ के बीच का रूपांतरण वास्तविक और व्युत्क्रमणीय है ।

जब हम समीकरण $U_1=Z_1$ को मिलाते हैं तो हमें $Z_1,\ldots,Z_n$ और $U_1..,U_n$ के बीच एक वास्तविक, व्युत्क्रमणीय रूपांतरण प्राप्त होता है । अतएव, $x_1,\ldots,x_n$ से $U_1,\ldots,U_n$ में एक वास्तविक व्युत्क्रमणीय रूपांतरण (अब तक उपयोग किए गए समस्त रूपांतरणों का गुणनफल) ऐसा होता है कि

$$\left.\begin{aligned}A(x,x)&=\lambda_1\alpha_1\ U_1^2+\lambda_2\alpha_2\ U_2^2+f\ \ (U_3,\ldots,U_n),\\ C(x,x)&=\ \ \alpha_1\ U_1^2+\ \alpha_2\ U_2^2+f\ \ (U_3,\ldots,U_n),\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

जहाँ α_1 और α_2 धनात्मक हैं; λ_1 और λ_2 दोनों $| A-\lambda C |$ के मूल हैं जिनके लिए आवश्यक नहीं है कि वे भिन्न ही हों; f और F वास्तविक द्विघाती समघात हैं । जैसा पहले-पहल किया गया था, यह दिखाया जा सकता है कि F धनात्मक-निश्चित है और λ_1 और λ_2 सहित $| f-\lambda F |=0$ के मूलों से $| A-\lambda C |=0$ के सारे मूलों का पता लग जाता है ।

इसी प्रकार, धीरे-धीरे, वास्तविक व्युत्क्रमणीय रूपांतरणों के द्वारा A(x,x) और C(x,x) का समानयन इन दो समघातों में किया जा सकता है—

$$\begin{aligned}A(x,x)&=\lambda_1\alpha_1Y_1^2+\lambda_2\alpha_2Y_2^2+\ldots+\lambda_n\alpha_nY_n^2,\\ C(x,x)&=\ \alpha_1Y_1^2+\ \alpha_2Y_2^2+\ldots+\ \ \alpha_nY_n^2,\end{aligned}$$

जहाँ कि प्रत्येक α_i धनात्मक है और $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ से $| A-\lambda C |=0$ के समस्त मूलों का पता लग जाता है ।

अंततः वास्तविक रूपांतरण

$$X_r=\sqrt{\alpha_r}\,.\,Y_r$$

से वांछित परिणाम प्राप्त हो जाता है, अर्थात्

$$A(x,x)=\lambda_1X_1^2+\ldots+\lambda_nX_n^2,\ C(x,x)=X_1^2+\ldots+X_n^2.$$

5. लांबिक रूपांतरण (Orthogonal transformations)

प्रमेय 48 में, $x_1^2+\ldots+x_n^2$ यदि धनात्मक-निश्चित समघात है तो प्रमेय में जिस रूपांतरण का विवेचन हुआ है वह $x_1^2+\ldots+x_n^2$ को $X_1^2+\ldots+X_n^2$ में रूपांतरित कर देता है । इस प्रकार के रूपांतरण को **लांबिक रूपांतरण** कहते हैं । इन रूपांतरणों की चर्चा तेरहवें अध्याय में की जाएगी; हम यह देखेंगे कि वे आवश्यक रूप से व्युत्क्रमणीय होते हैं । तब तक, एक महत्वपूर्ण प्रमेय की चर्चा करेंगे ।

प्रमेय 49—n चरों में एक वास्तविक द्विघाती समघात A(x,x) का समानयन, एक वास्तविक लांबिक रूपांतरण द्वारा, समघात

$$\lambda_1 X_1^2 + \ldots + \lambda_n X_n^2,$$

में हो सकता है जहाँ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ से $|A-\lambda I|=0$ के समस्त मूलों की गणना की जा सकती है। साथ ही, समस्त मूल वास्तविक होते हैं।

इसकी उपपत्ति प्रमेय 48 में C(x,x) के स्थान पर $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ लिखकर की जा सकती है।

6. अ-शून्य अभिलक्षण मूलों की संख्या

यदि B उस लांबिक रूपांतरण का मैट्रिक्स है जिससे A(x,x) का समानयन समघात

$$\lambda_1 X_1^2 + \ldots + \lambda_n X_n^2, \tag{1}$$

में हो जाता है तो (प्रमेय 37 से) B′AB, समघात (1) का मैट्रिक्स होगा और इसके अग्रग विकर्ण में अवयव $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ होंगे और अन्यत्र शून्य होगा। इसका क्रम, उन λ की संख्या होगी जो शून्य नहीं हैं। लेकिन चूँकि B व्युत्क्रमणीय है, B′ AB का क्रम, A के क्रम के बराबर होगा। अतएव A का क्रम, अभिलक्षण समीकरण $|A-\lambda I|=0$ के अशून्य मूलों की संख्या के बराबर है।

7. किसी द्विघाती समघात की चिह्निका

7.1. जैसा प्रमेय 47 (§ 3.4) में सिद्ध किया जा चुका है, r क्रम का कोई वास्तविक द्विघाती समघात एक वास्तविक व्युत्क्रमणीय रूपांतरण द्वारा, समघात

$$\alpha_1 X_1^2 + \ldots + \alpha_r X_r^2, \tag{1}$$

में रूपान्तरित हो सकता है जहाँ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ वास्तविक हैं और शून्य नहीं हैं।

§3.3. से यह देखा जा सकता है कि साधारणतया इस प्रकार के किसी समानयन के लिए अनेक तरीके हो सकते हैं; प्रथम चरण में ही हमें इस बात के चुनाव की काफी सुविधा रहती है कि हम परिस्थिति के अनुसार कौन-सा अशून्य a_{rs}, अशून्य b_{11} या c_{11} होने के लिए चुनते हैं।

अब हम जो प्रमेय सिद्ध करेंगे वह इस बात की स्थापना कर देता है कि, एक समघात A(x,x) के दिए रहने पर, (1) में धनात्मक α-ओं और ऋणात्मक α-ओं की संख्या समानयन की विधि पर निर्भर नहीं होती।

प्रमेय 50—यदि दो वास्तविक व्युत्क्रमणीय रूपांतरण, मान लीजिए B_1 और B_2 द्वारा r क्रम के किसी दिए हुए वास्तविक द्विघाती समघात का समानयन,

$$\alpha_1 X_1^2 + \ldots + \alpha_r X_r^2, \tag{2}$$

$$\beta_1 Y_1^2 + \ldots + \beta_r Y_r^2, \tag{3}$$

समघात में कर दिया जाए तो धनात्मक α-ओं की संख्या धनात्मक β-ओं की

संख्या के बराबर होती है और ऋणात्मक α-ओं की संख्या ऋणात्मक β-ओं की संख्या के बराबर होती है।

मान लीजिए, आरंभ के द्विघाती समघात में $x_1, \ldots, x_n$ चरों की संख्या n है; मान लीजिए धनात्मक α-ओं की संख्या μ और धनात्मक β-ओं की संख्या ν, है। मान लीजिए, X, Y चरों का इस प्रकार अंकन किया जाता है कि धनात्मक α और β पहले आजाएँ। तब, चूँकि (2) और (3) एक ही आरंभिक समघात के रूपांतरण हैं, हमारे पास

$$\alpha_1 X_1^2 + \ldots + \alpha_\mu X_\mu^2 - |\alpha_{\mu+1}| X_{\mu+1}^2 - \ldots - |\alpha_r| X_r^2$$
$$\equiv \beta_1 Y_1^2 + \ldots + \beta_\nu Y_\nu^2 - |\beta_{\nu+1}| Y_{\nu+1}^2 - \ldots - |\beta_r| Y_r^2 \qquad (4)$$

अब, प्रमेय के विपरीत, कल्पना कीजिए कि $\mu > \nu$ है। तो $n+\nu-\mu$ समीकरण

$$Y_1 = 0, \ \ldots, \ Y_\nu = 0, \ X_{\mu+1} = 0, \ \ldots, \ X_n = 0 \qquad (5)$$

आदि n चर $x_1, \ldots, x_n$ में समघात (homogeneous) समीकरण होंगे।†

यहाँ जितने चर हैं उनसे कम समीकरण हैं और इसलिए (आठवाँ अध्याय, § 5 से) समीकरणों का एक साधन $x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n$ है जहाँ $\xi_1, \ldots, \xi_n$ सब ही शून्य नहीं हैं।

मान लीजिए, X_r', Y_r' क्रमशः X_r, Y_r के वे मान हैं जब $x = \xi$ हो। तो, (4) और (5) से,

$$\alpha_1 X_1'^2 + \ldots + \alpha_\mu X_\mu'^2 = -|\beta_{\nu+1}| Y'^2_{\nu+1} - \ldots - |\beta_r| Y_r'^2$$

जो तब तक असंभव है जब तक X′ और Y′ प्रत्येक शून्य नहीं है।

अतएव या तो यहाँ अंतर्विरोध (contradiction) हो जाता है या

$$\left.\begin{array}{l} X_1' = 0, \ \ldots, \ X_\mu' = 0, \\ X_{\mu+1}' = 0, \ldots, X_n' = 0, \end{array}\right\} \qquad (6)$$

और (5) से

लेकिन, (6) का अर्थ यह हुआ कि n समीकरण

$$X_1 = 0, \ \ldots, \ X_n = 0, \qquad (7)$$

(पूर्णरूप में, मान लीजिए) $\sum_{k=1}^{n} l_{ik} x_k = 0 \, (i = 1, \ldots, n)$

का एक साधन $x_r = \xi_r$ है जिसमें $\xi_1, \ldots, \xi_n$ सब ही शून्य नहीं हैं। इसका मतलब यह हुआ कि डिटर्मिनेंट $|l_{ik}| = 0$ है, जो हमारी इस परिकल्पना का उल्टा या अंतर्विरोधी है कि रूपांतरण

$$X_i = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} x_k \quad (i = 1, \ldots, n)$$

व्युत्क्रमणीय है।

---

†प्रत्येक X और Y, $x_1, \ldots x_n$ में एक एकघाती समघात है।

अतएव, इस कल्पना से कि $\mu<\upsilon$ है; अंतर्विरोध हो जाता है। इसी प्रकार, $\upsilon>\mu$ से भी अंतर्विरोध हो जाता है। परिणामस्वरूप, $\mu=\nu$ होना चाहिए और इस प्रकार प्रमेय सिद्ध हो जाता है।

7.2. r क्रम के किसी समघात का समानयन प्रमेय 49 के लांबिक रूपांतरण द्वारा भी किया जा सकता है। इससे समघात का रूप

$$\lambda_1 X_1^2+\ldots+\lambda_r X_r^2,$$

हो जाता है जहाँ $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ अभिलक्षण समीकरण के अ-शून्य मूल हैं।

अतएव, प्रमेय 50 में धनात्मक α-ओं या β-ओं की संख्या वही है जो समघात के धनात्मक अभिलक्षण मूलों की संख्या है।

7.3. हम यह सिद्ध कर चुके हैं कि प्रत्येक द्विघाती समघात की P और N दो संख्याएँ सहचारी होती हैं जो किसी विहित समघात में धनात्मक और ऋणात्मक गुणांको की संख्या होती हैं। P और N का योग ही समघात का क्रम होता है।

परिभाषा 8. संख्या P−N को समघात की चिह्निका कहते हैं।

7.4. अन्त में हम यह प्रमेय देंगे जिसके अनुसार वे दो द्विघाती समघात जिनका क्रम और जिनकी चिह्निका एक ही होती है कुछ विशेष अर्थों में, तुल्य होते हैं।

प्रमेय 51—**मान लीजिए $A_1(x,x)$, $A_2(y,y)$ दो वास्तविक द्विघाती समघात हैं जिनका एक ही क्रम r और एक ही चिह्निका s है। तो एक वास्तविक व्युत्क्रमणीय रूपांतरण $x=By$ ऐसा होता है जो $A_1(x,x)$ को $A_2(y,y)$ में रूपांतरित कर देता है।**

जब $A_1(x,x)$ का समानयन उसके विहित समघात में किया जाता है तो

$$\alpha_1 X_1^2+\ldots+\alpha_u X_\mu^2-\beta_{\mu+1} X_{u+1}^2 \quad \ldots-\beta_r X_r^2 \qquad (1)$$

हो जाता है जहाँ समस्त α और β धनात्मक हैं, जहाँ $\mu=\frac{1}{2}(s+r)$ है, और जहाँ x से X में रूपांतरण वास्तविक और व्युत्क्रमणीय है।

वास्तविक रूपांतरण

$$\xi_1=X_1\sqrt{\alpha_1},\ldots,\xi_\mu=X_\mu\sqrt{\alpha\mu},$$

$$\xi_{\mu+1}=X_{\mu+1}\sqrt{\beta_{\mu+1}},\ldots,\xi_r=X_r\sqrt{\beta_r}$$

(1) को

$$_1^2+\ldots+\xi_h^2-{}_{\mu+i}^2 \quad \ldots-{}_r \qquad (2)$$

में बदल देता है।

तो, एक वास्तविक व्युत्क्रमणीय रूपांतरण, मान लीजिए $x=C_1\xi$ ऐसा होगा जो $A_1(x,x)$ को (2) में बदल देगा।

इसी प्रकार, एक वास्तविक व्युत्क्रमणीय रूपांतरण मान लीजिए $y=C_2\xi$ ऐसा होगा जो $A_2(y,y)$ को (2) में बदल देगा। अथवा, विपरीत शब्दों में, (2), $A_2(y,y)$ में एक रूपांतरण $\xi=C_2^{-1}y$ द्वारा बदल जाता है। अतएव,

$$x=C_1C_2^{-1}y$$

$A_1(x,x)$ को $A_2(y,y)$ में बदल देता है।

प्रश्नावली बारह

1. दो समघात $A(x,x)$ और $C(x,x)$ में $a_{rs}=c_{rs}$ जब $r=1,\ldots,k$, और $s=1,\ldots,n$ हो, सिद्ध कीजिए कि दोनों समघातों के λ समीकरण के k मूल एक के बराबर होंगे।

2. दो समघात $ax^2+2hxy+by^2$ और $a'x^2+2h'xy+b'y^2$ का λ समीकरण लिखिए और प्रारंभिक रीति से सिद्ध कीजिए कि मूल तब वास्तविक होंगे जब $a>0$ और $ab-h^2>0$

संकेत—मान लीजिए,

$$ax^2+2hxy+by^2=a(x-\alpha_1y)\ (x-\beta_1y),$$
$$a'x^2+2h'xy+b'y^2=a'(x-\alpha_2y)(x-\beta_2y).$$

λ में वास्तविक मूलों के लिए प्रतिबंध तब यों हो जाता है—

$$(ab'+a'b-2hh')^2-4(ab-h^2)(a'b'-h'^2)\geqslant 0,$$

जिसको इस प्रकार लिख सकते हैं—

$$a^2a'^2(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)(\alpha_1-\beta_2)(\beta_1-\alpha_2)\geqslant 0.$$

जब $ab-h^2>0$ है तो α_1 और β_1 संयुग्मी संमिश्र होंगे और परिणाम को $\alpha_1=\gamma+i\delta$, $\beta_1=\gamma-i\delta$ लिखने के बाद प्राप्त किया जा सकता है।

वास्तव में, λ मूल वास्तविक होंगे अलावा इसके कि जब α_1,β_1, α_2,β_2 वास्तविक हों और वे मूल जिनमें अनुबंध 1 हो उन मूलों को अलग-अलग करते हों जिनमें अनुबंध 2 हो।

3. सिद्ध कीजिए कि मैट्रिक्स A के समस्त अभिलक्षण मूल धनात्मक होंगे, जब

$$A(x,x)=6x_1^2+35x_2^2+11x_3^2+34x_2x_3.$$

4. जब,

$$A(x,x)=4x_1^2+9x_2^2+2x_3^2+8x_2x_3+6x_3x_1+6x_1x_2,$$

हो, तो सिद्ध कीजिए कि दो अभिलक्षण मूल धनात्मक होंगे और एक ऋणात्मक होगा।

5. $A \equiv \Sigma\Sigma a_{rs}x_r x_s;\quad X_r = \frac{1}{2}\,\partial A/\partial x_r;$

$$A_k = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1k} & X_1 \\ . & . & . & . & . \\ a_{k1} & . & . & a_{kk} & X_k \\ X_1 & . & . & X_k & A \end{vmatrix},\quad \xi_k = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1k} \\ . & . & . & . \\ a_{k-1,1} & . & . & a_{k-1,k} \\ X_1 & . & . & X_k \end{vmatrix}$$

अंतिम पंक्ति में से अन्य पंक्तियों के गुणजों को घटाने के पश्चात्, फिर A_k के लिए, अंतिम स्तंभ में से अन्य स्तंभों के गुणजों को घटाने के पश्चात्, सिद्ध कीजिए कि A_k और ξ_k दोनों $x_1, \ldots, x_k$ आदि चरों से स्वतंत्र होंगे जब $k < n$ हो। यह भी सिद्ध कीजिए कि $A_n = 0$

6. प्रश्न 5 के संकेतन और

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1k} \\ . & . & . & . \\ a_{k1} & . & . & a_{kk} \end{vmatrix}$$

होने पर, A_k में प्रमेय 18 को लागू करने के बाद, सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} A_{k-1} & \xi_k \\ \xi_k & D_k \end{vmatrix} = D_{k-1}A_k.$$

7. प्रश्न 6 के परिणाम से, और प्रश्न 5 के परिणाम $A_n = 0$ से सिद्ध कीजिए कि यदि कोई भी D_k शून्य न हो तो

$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k^2}{D_{k-1}\ D_k}$$

उस परिस्थिति पर भी विचार कीजिए जब A का क्रम r, n से कम हो और $D_1, \ldots, D_r$ यदि सभी शून्य से भिन्न हों।

8. $4x_2x_3 + 2x_3x_1 + 6x_1x_2$ को $a_{11} \neq 0$ होने पर एक समघात $\Sigma\Sigma a_{rs}X_rX_s$ में रूपांतरित कीजिए और इस प्रकार (ग्यारहवें अध्याय §1.2 की रीति से) समघात का एक विहित समघात और चिह्निका ज्ञात कीजिए।

9. प्रश्न 4 की सहायता से, सिद्ध कीजिए कि

$$4x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_2x_3 + 6x_3x_1 + 6x_1x_2$$

का क्रम 3 और चिह्निका 1 है। इस समघात के एक विहित समघात में दो स्वतंत्र समानयनों के लिए प्रमेय 50 की जाँच कीजिए।

10. सिद्ध कीजिए कि एक द्विघाती समघात दो एकघाती खण्डों का गुणनफल होगा यदि और केवल यदि उसका क्रम 2 से अधिक न हो।
संकेत—प्रमेय 47 का उपयोग कीजिए।

11. सिद्‌ध कीजिए कि एक हर्मिटीय समघात $A(x, \bar{x})$ को यदि $x=BX, \bar{x}=\bar{B}\bar{X}$ रूपांतरणों की सहायता से नए चरों में रूपांतरित किया जाए तो उस के विवेचक में $|B| \times |\bar{B}|$ से गुणा हो जाता है। हर्मिटीय समघातों के लिए प्रमेय 43 और 44 के अनुरूपों को प्राप्त कीजिए।

12. यदि A एक हर्मिटीय मट्रिक्स हो तो सिद्‌ध कीजिए कि $|A-\lambda I|=0$ के समस्त मूल वास्तविक होंगे।

संकेत—प्रमेय 45 से तुलना कीजिए और

$$C(x, \bar{x})=\sum_{r=1}^{n} x_r\bar{x}_r$$

का उपयोग कीजिए।

13. हर्मिटीय समघातों के लिए प्रमेय 46 और 47 के अनुरूपों को सिद्‌ध कीजिए।

14. $A(x, \bar{x})$ $C(x, \bar{x})$ हर्मिटीय समघात हैं जिनमें से C धनात्मक-निश्चित है। सिद्‌ध कीजिए कि एक व्युत्क्रमणीय रूपांतरण ऐसा होता है जो दोनों समघातों को

$$\lambda_1 X_1\bar{X}_1+\ldots+\lambda_n X_n\bar{X}_n, \quad X_1\bar{X}_1+\ldots+X_n\bar{X}_n$$

के रूप में व्यक्त कर देता है जहाँ $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ आदि $|A-\lambda C|=0$ के मूल हैं और सब वास्तविक हैं।

15. **वैश्लेषिक गतिकी (Dynamics) में कुछ महत्व का एक उदाहरण**†—

सिद्‌ध कीजिए कि $m+n$ चरों में एक द्विघाती समघात,

$$2T=\Sigma a_{rs}\, x_r\, x_s \;\; (a_{rs}=a_{sr})$$

को जब $\xi_1, \ldots, \xi_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}$ के पदों में व्यक्त किया जाए जहाँ $\xi_r=\partial T/\partial x_r$ है तो एक भी पद ऐसा नहीं होगा जिसमें किसी ξ और किसी x का गुणनफल आ रहा हो।

साधन—सावधानी के साथ काम से परिणाम आसानी से सिद्‌ध हो सकता है। संकलन की परिपाटी का उपयोग कीजिए : मान लीजिए, r और s का परिसर $1,\ldots, m$ है यह भी मान लीजिए कि u और t का परिसर $m+1,\ldots,m+n$ है। तो 2T को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है—

$$2T=a_{rs}x_rx_s+2a_{ru}x_ry_u+a_{ut}\, y_u\, y_t,$$

जहाँ, अलग से भेद बताने के लिए जब भी अनुबंध, m से अधिक है, हमने x के स्थान पर y लिखा है।

अब हमें T को y-ओं और नए चरों ξ_s के पदों में व्यक्त करना है जो यों दिया जा सकता है—

$$\xi_s=a_{rr}\, x_r+a_{su}\, y_u \;\; (s=1,\ldots,m).$$

---

†देखिए, लैम्ब, हायर मैकेनिक्स, §77 : रोथियन फंक्शन। इस उदाहरण के लिए मैं श्री जे० हार्डकिशन का आभारी हूं।

m कोटि के डिटर्मिनेंट $\triangle = | a_{rs} |$ में a_{sr} के महखण्ड को A_{sr} से गुण कीजिए और जोड़िए : तो

$$\triangle x_r = A_{sr}\xi_s - A_{sr}\, a_{su} y_u$$

अब, $2T = x_r(a_{rs}x_s + 2a_{ru}y_u) + a_{ut}\, y_u\, y_t$

$$= x_r(\xi_r + a_{ru}\, y_u) + a_{ut}\, y_u\, y_t.$$

$$2\triangle T = (A_{sr}\xi_s - A_{sr}\, a_{su}y_u)(\xi_r + a_{ru}y_u) + a_{ut}y_u y_t \triangle$$

$$= A_{sr}\,\xi_s\xi_r + y_u(a_{ru}A_{sr}\xi_s - a_{su}A_{sr}\xi_r) + \phi(y,y)$$

जहाँ $\phi(y,y)$ केवल y-ओं में एक द्विघाती समघात को प्रकट करता है।

लेकिन, चूंकि $a_{rs} = a_{sr}$ हम यह भी देखते हैं कि $A_{sr} = A_{rs}$ इस प्रकार उपर्लिखित में y_u को गुणा करने वाला पद यों लिखा जा सकता है—

$$a_{ru}\, A_{rs}\xi_s - a_{su}\, A_{sr}\xi_r$$

और यह शून्य है, क्योंकि r और s दोनों ही मूक अनुबंध हैं । अतएव, 2T इस रूप में लिखा जा सकता है—

$$2T = (A_{sr}/\triangle)\,\xi_s\xi_r + b_{ut}y_u y_t$$

जहाँ r और s के मान 1 से m तक और u, t के मान m+1 से m+n तक हैं।

तेरहवाँ अध्याय 13

लांबिक रूपांतरण

1. परिभाषा और प्रारंभिक गुणधर्म

1.1. पिछले अध्याय में दी गई परिभाषा को हम फिर लाएँगे।

परिभाषा 9—**एक रूपांतरण $x=AX$ जो $x_1^2+\ldots+x_n^2$ को $X_1^2+\ldots+X_n^2$ म रूपांतरित करदे, लांबिक रूपांतरण कहलाता है । मैट्रिक्स A को लांबिक मैट्रिक्स कहते हैं ।**

इस प्रकार के रूपांतरण का सबसे अधिक जाना-पहचाना उदाहरण वैश्लेषिक ज्यामिति में मिलता है । जब (x, y, z), समकोणीय अक्ष **Ox, Oy,** Oz के निर्देश में एक बिन्दु P के निर्देशांक हों और जब (X, Y, Z), उन समकोणीय अक्ष OX, OY, OZ के निर्देश में उसके निर्देशांक हों जिनकी पहले वाले अक्षों के सापेक्ष दिक्कोज्याएँ (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3), हैं तो निर्देशांकों के ये दोनों समुच्चय निम्नलिखित समीकरणों द्वारा संबद्ध होते हैं—

$$\begin{aligned} x&=l_1X+l_2Y+l_3Z, \\ y&=m_1X+m_2Y+m_3Z, \\ z&=n_1X+n_2Y+n_3Z. \end{aligned}$$

और,

$$x^2+y^2+z^2=X^2+Y^2+Z^2=OP^2$$

1.2. एक लांबिक रूपांतरण के मैट्रिक्स का कोई विशेष गुणधर्म अवश्य होना चाहिए। यह आसानी से प्राप्त हो सकता है।

यदि $A\equiv[a_{rs}]$ एक लांबिक मैट्रिक्स है, और $x=AX$ है तो X चरों के मानों के प्रत्येक समुच्चय के लिए,

$$\sum_{=1}^{n} X_r^2=\sum_{r=1}^{n} x_r^2=\sum_{r=1}^{n} (a_{r1}X_1+\ldots+a_{rn}X_n)^2$$

अतएव

$$\left.\begin{aligned} a_{1s}^2+\ldots+a_{ns}^2 &= 1 \ (s=1,\ldots,n), \\ a_{1s}a_{1t}+\ldots+a_{ns}a_{nt}&=0 \ (s\neq t) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ये वे संबंध हैं जो किसी लांबिक मैट्रिक्स की पहचान होते हैं। ये मैट्रिक्स समीकरण

$$AA' = I, \qquad (2)$$

के तुल्य हैं। मैट्रिक्स गुणनफल AA' बनाकर यह बात देखी जा सकती है।

1.3. जब (2) संतुष्ट हो तो A′ (प्रमेय 25 से) A का व्युत्क्रम होता है जिस के फलस्वरूप A′A भी एकवत् मैट्रिक्स के बराबर हो जाता है और इस तथ्य से (AA′ को संपूर्ण रूप से लिखने के बाद) ये संबंध आ जाते हैं—

$$\left.\begin{array}{l} a_{s1}^2 + \ldots + a_{sn}^2 = 1 \quad (s=1,\ldots,n), \\ a_{s1}a_{t1} + \ldots + a_{sn}a_{tn} = 0 \quad (s \neq t) \end{array}\right\} \quad (3)$$

जब $n=3$ हो और रूपांतरण अक्षों का वही परिवर्तन हो जिसका § 1.1 में विवेचन हुआ है, तो संबंध (1) और (3) निम्नलिखित सुपरिचित रूप में आ जाते हैं—

$$l_1^2+l_2^2+l_3^2=1, \quad l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=0,$$
$$l_1^2+m_1^2+n_1^2=1, \quad l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0,$$

इत्यादि-इत्यादि।

1.4 अब हम चार ऐसे प्रमेयों का वर्णन करेंगे जिनमें किसी लांबिक मैट्रिक्स के महत्वपूर्ण गुणधर्मों का विवेचन होता है।

प्रमेय 52—**एक वर्ग मैट्रिक्स A के लांबिक होने के लिए एक आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध AA′=I, है।**

यह प्रमेय, §§1.2, 1.3 से आसानी से स्पष्ट हो जाता है।

उपप्रमेय—**प्रत्येक लांबिक रूपांतरण, व्युत्क्रमणीय होता है।**

प्रमेय 53—**दो लांबिक रूपांतरणों का गुणनफल एक लांबिक रूपांतरण होता है।**

मान लीजिए $x=AX$, $X=BY$ लांबिक रूपांतरण हैं। तो,

$$AA'=I, \qquad BB'=I$$

अतएव,

$$\begin{aligned}(AB)(AB)' &= ABB'A' \quad (\text{दे० प्रमेय } 23)\\ &= A\,I\,A'\\ &= AA' = I,\end{aligned}$$

और इस प्रकार प्रमेय सिद्ध हो जाता है।

प्रमेय 54—**एक लांबिक रूपांतरण का मापांक या तो $+1$ या -1 होता है।**

यदि $AA'=I$ है और $|A|$, मैट्रिक्स A का डिटर्मिनेन्ट है तो, $|A| \cdot |A'| = 1$ होगा, लेकिन $|A'| = |A|$, और अतएव $|A|^2=1$.

प्रमेय 55—**यदि λ, किसी लांबिक रूपांतरण का एक अभिलक्षण मूल तो $\frac{1}{\lambda}$ भी होगा।**

मान लीजिए, A एक लांबिक मैट्रिक्स है: तो $AA'=I$, और इसलिए

$$A'=A^{-1}. \qquad (4)$$

प्रमेय 36 के उपप्रमेय से, A′ के अभिलक्षण मूल A के अभिलक्षण मूलों के व्युत्क्रम होते हैं। लेकिन A′ का अभिलक्षण समीकरण एक ऐसा डिटर्मिनेन्ट होता है जिसमें यदि पंक्तियों और स्तंभों का विनिमय किया जाए तो वह A का अभिलक्षण समीकरण हो जाता है।

अतएव A के n अभिलक्षण मूल, A के n अभिलक्षण मूलों के व्युत्क्रम हुए। इस प्रकार प्रमेय सिद्ध हो गया। (इसकी एक दूसरी उपपत्ति इसी अध्याय के अंत में प्रश्न 6 में दी गई है।)

2. एक लांबिक मैट्रिक्स का मानक रूप

2.1. A के लांबिक मैट्रिक्स होने के लिए यह आवश्यक है कि § 1.2 के समीकरण (1) संतुष्ट हों। ऐसे समीकरण संख्या में—

$$n+{}^{n}C_2=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

होते हैं। A में n^2 अवयव होते हैं। इस प्रकार यह आशा† करी जा सकती है कि A की परिभाषा के लिए आवश्यक स्वतंत्र अचरों की संख्या

$$n^2-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

होगी।

यदि n कोटि के व्यापक लांबिक मैट्रिक्स को किसी और तरह के मैट्रिक्स के पदों में व्यक्त करना हो तो एक ऐसे मैट्रिक्स की आवश्यकता होती है जिसमें $\frac{1}{2}n(n-1)$ स्वतंत्र अवयव हों। ऐसा कोई मैट्रिक्स n कोटि का विषम-सममित मैट्रिक्स होगा; अर्थात्,

$$[b_{ik}], \qquad b_{ik}=-b_{ki}.$$

उदाहरण के लिए, जब $n=3$, हो तो

$$\begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

में $1+2=3$ स्वतंत्र अवयव होंगे, अर्थात् वे जो अग्रग विकर्ण से ऊपर हैं, व्यापक स्थिति में ऐसे अवयवों की संख्या

$$1+2+\ldots+(n-1)=\tfrac{1}{2}n(n-1)$$

होगी।

---

†अचरों की गणना की रीति से परिणाम का संकेत हो जाता है। वह कदाचित् ही कभी उन परिणामों को सिद्ध करता हो और ऊपर उसका जो मोटा रूप दिया गया है उससे तो कुछ भी सिद्ध नहीं होता।

प्रमेय 56—यदि S, n कोटि का कोई विषम-सममित मैट्रिक्स हो, और $I+S$ व्युत्क्रमणीय हो, तो

$$O=(I-S)(I+S)^{-1}$$

n कोटि का एक लांबिक मैट्रिक्स होगा।

चूंकि S विषम-सममित है,

$$S'=-S, \quad (I-S)'=I+S, \quad (I+S)'=I-S;$$

और जब $I+S$ व्युत्क्रमणीय होगा तो उसका एक व्युत्क्रम $(I+S)^{-1}$ होगा। अतएव व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स O की परिभाषा

$$O=(I-S)\ (I+S)^{-1}$$

से दी जा सकती है। हम देखते हैं कि

$$O'=\{(I+S)^{-1}\}'\ (I-S)' \qquad \text{(प्रमेय 23)}$$

$$=(I-S)^{-1}\ (I+S) \qquad \text{(प्रमेय 27)}$$

और $OO'=(I-S)\ (I+S)^{-1}\ (I-S)^{-1}\ (I+S).$ (5)

अब $I-S$ और $I+S$ में क्रम विनिमय हो सकता है† और, परिकल्पना से, $I+S$ व्युत्क्रमणीय है। अतएव‡

$$(I-S)\ (I+S)^{-1}=(I+S)^{-1}(I-S),$$

और (5) से,

$$OO'=(I+S)^{-1}\ (I-S)\ (I-S)^{-1}\ (I+S)=(I+S)^{-1}\ (I+S)=I.$$

अतएव O एक लांबिक मैट्रिक्स होगा (दे० प्रमेय 52)।

टिप्पणी—यदि S के अवयव वास्तविक हैं तो $I+S$ अव्युत्क्रमणीय नहीं हो सकता। यह तथ्य, जिसको एक प्रमेयिका (lemma) के रूप में §2.2 में सिद्ध किया गया है, केली (Cayley) को अच्छी तरह ज्ञात था जिसने प्रमेय 56 की खोज की थी।

2.2. प्रमेयिका—**यदि S एक वास्तविक विषम-सममित मैट्रिक्स है तो $I+S$ व्युत्क्रमणीय होगा।**

उस डिटर्मिनेन्ट $\triangle$ पर विचार कीजिए जो S को पूरा लिखकर और मुख्य विकर्ण के शून्यों के स्थान पर x लिखकर प्राप्त होता है; उदाहरण के लिए,

---

†$(I-S)(I+S)=I^2+IS-SI-S^2=I^2-S^2=(I+S)(I-S)$ $[SI=IS]$.

‡यदि $AQ=QA$ और Q व्युत्क्रमणीय हो, तो $AQ^{-1}=Q^{-1}A$.

क्योंकि $Q^{-1}AQ=Q^{-1}QA=A$

और इसलिए $AQ^{-1}=(Q^{-1}AQ)Q^{-1}=Q^{-1}AQQ^{-1}=Q^{-1}A$.

$n=3$ होने पर,

$$\Delta=\begin{vmatrix} x & a & b \\ -a & x & c \\ -b & -c & x \end{vmatrix}, \qquad S=\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$$

Δका x के सापेक्ष (with respect to x) अवकल गुणांक (differential coefficient) ऐसे n डिटर्मिनेन्टों का योग होता है (पहला अध्याय, §7) जिनमें से प्रत्येक $n-1$ कोटि के एक विषम-सममित डिटर्मिनेन्ट के बराबर होता है जब $x=0$ हो। इस प्रकार, यदि $n=3$ होने पर,

$$\frac{d\Delta}{dx}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & x & c \\ -b & -c & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & -c & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & a & b \\ -a & x & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x & c \\ -c & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & b \\ -b & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & a \\ -a & x \end{vmatrix},$$

और इनमें से बाद वाले, 2 कोटि के विषम-सममित डिटर्मिनेन्ट हो जाते हैं जब $x=0$ हो ।

फिर अवकलित करने पर, व्यापक स्थिति में, हम देखते हैं कि $d^2\Delta/dx^2$ ऐसे $n(n-1)$ डिटर्मिनेन्टों का योग है जिनमें से प्रत्येक $n-2$ कोटि के एक विषम-सममित डिटर्मिनेन्ट के बराबर होता है जब $x=0$ हो; इत्यादि, इत्यादि ।

फलस्वरूप, मैक्लारिन–प्रमेय (Maclaurin's theorem) से हम देखते हैं कि—

$$\Delta=\Delta_0+x\sum_1+x^2\sum_2+\ldots+x^n, \tag{6}$$

जहाँ Δ_0, n कोटि का एक विषम-सममित डिटर्मिनेन्ट है, $\sum_1$, $n-1$ कोटि के विषम-सममित डिटर्मिनेन्टों का योग है, इत्यादि, इत्यादि ।

लेकिन विषम कोटि का कोई विषम-सममित डिटर्मिनेन्ट शून्य के बराबर और सम कोटि का ऐसा डिटर्मिनेन्ट एक पूर्णवर्ग (perfect square) होता है (दे० प्रमेय 19, 21), अतएव

$$\left.\begin{array}{ll} n \text{ सम (हो तो)} & \Delta=P_0+x^2P_2+\ldots+x^n, \\ n \text{ विषम (हो तो)} & \Delta=xP_1+x^3P_3+\ldots+x^n, \end{array}\right\} \tag{7}$$

जहाँ P_0, $P_1, \ldots$ या तो वर्ग हैं या वर्गों के योग हैं, और इसलिए $P_0, P_1, \ldots$ साधारणतया, धनात्मक होंगे और यद्यपि विशिष्ट स्थिति में वे शून्य हो सकते हैं, वे ऋणात्मक नहीं हो सकते ।

$x=1$ रखने से प्रमेयिका भी स्पष्ट हो आती है।

2.3. प्रमेय 57—**प्रत्येक वास्तविक लांबिक मैट्रिक्स A को**

$$J(I-S)(I+S)^{-1}$$

के रूप में व्यक्त किया जा सकता है जहाँ S एक विषम-सममित मैट्रिक्स है और J एक ऐसा मैट्रिक्स है जिसके विकर्ण में प्रत्येक स्थान में ±1 और अन्यत्र शून्य है।

इसकी उपपत्ति से पहले हम प्रमेयिका की स्थापना करेंगे जो सभी वर्ग मैट्रिक्सों के लिए सत्य होती है चाहे वे लांबिक हों चाहे न हों।

प्रमेयिका—**एक वर्ग मैट्रिक्स A दिए रहने पर एक ऐसे मैट्रिक्स J, जिसकी प्रत्येक विकर्ण स्थिति में ±1 और अन्यत्र शून्य हो, का चुनना इस प्रकार संभव है कि −1 मैट्रिक्स JA का एक अभिलक्षण मूल न हो।**

J से गुणन के फलस्वरूप मैट्रिक्स के अवयवों में पंक्तियों के हिसाब से केवल चिह्नों में ही परिवर्तन हो जाता है; उदाहरणार्थ,

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$$

इसको ध्यान में रखते हुए, हम देखते हैं कि या तो प्रमेयिका सत्य है या पंक्ति चिह्नों के प्रत्येक संभव संचय के लिए निम्नलिखित (8) सत्य होगा—

$$\begin{vmatrix} \pm a_{11}+1 & \pm a_{12} & \cdot & \cdot & \pm a_{1n} \\ \pm a_{21} & \pm a_{22}+1 & \cdot & \cdot & \pm a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pm a_{n1} & \pm a_{2n} & \cdot & \cdot & \pm a_{nn}+1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

लेकिन यह दिखाया जा सकता है कि (8) असंभव है। मान लीजिए कि वह संभव है। तो, (8) में, (i) पहली पंक्ति में धन होने पर, (ii) पहली पंक्ति में ऋण होने पर जो दो रूप आते हैं—उन्हें जोड़ने पर, पंक्ति-चिह्नों के प्रत्येक संभव संचय के लिए

$$\begin{vmatrix} \pm a_{22}+1 & \cdot & \cdot & \cdot & \pm a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pm a_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & \pm a_{nn}+1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

इसी प्रकार के तर्क से हम धीरे-धीरे डिटर्मिनेन्ट की कोटि एक-एक करके कम कर सकते हैं जब तक $\pm a_{nn}+1=0$ न हो जाए : लेकिन $+a_{nn}+1=0$ और $-a_{nn}+1=0$ दोनों एक साथ ठीक और संभव नहीं हो सकते, अतएव (8) भी संभव नहीं हो सकता।

2.4. प्रमेय 57 की उपपत्ति—मान लीजिए A वास्तविक अवयवों वाला कोई लांबिक मैट्रिक्स है। यदि A का कोई अभिलक्षण मूल −1 है तो मान लीजिए

कि $J_1A=A_1$ एक ऐसा मैट्रिक्स है जिसके समस्त अभिलक्षण मूल -1 से भिन्न हैं, जहां J_1 उसी प्रकार का है जिस प्रकार का प्रमेयिका में J है।

अब J_1 व्युत्क्रमणीय है और उसका व्युत्क्रम J_1^{-1} भी एक ऐसा मैट्रिक्स है जिसके विकर्ण स्थानों में ± 1 और अन्यत्र शून्य हैं जिससे

$$A=J_1^{-1}\,J_1A=J_1^{-1}A_1=JA_1,$$

जहां $J=J_1^{-1}$ उसी प्रकार का है जैसा प्रमेय 57 में बताया गया है। इसके अतिरिक्त, A_1 लांबिक होगा क्योंकि A में ही कुछ विशेष पंक्तियों के चिह्नों के परिवर्तन के बाद वह आ जाता है, और हमने इस प्रकार उसे चुना है कि मैट्रिक्स A_1+I व्युत्क्रमणीय हो। अतएव इतना सिद्ध करना शेष रह जाता है कि जब A_1 एक ऐसा वास्तविक लांबिक मैट्रिक्स हो कि A_1+I व्युत्क्रमणीय हो तो एक विषम सममित मैट्रिक्स S इस प्रकार का हो सकता है कि

$$A_1=(I-S)\,(I+S)^{-1}$$

इसके लिए मान लीजिए,

$$S=(I-A_1)\,(I+A_1)^{-1} \qquad (10)$$

(10) के दाए पक्ष के मैट्रिक्स क्रमविनिमय† वाले हैं और बिना किसी दुविधा या संदेह के हम

$$S=\frac{I-A_1}{I+A_1}, \qquad S'=\frac{I-A_1'}{I+A_1'} \qquad (11)$$

लिख सकते हैं। इसके अतिरिक्त, $A_1A_1'=A_1'A_1=I$ चूंकि A_1 लांबिक है, इस प्रकार A_1 और A_1' दोनों क्रमविनिमय वाले हैं A_1, A_1', और I के साथ साधारण संख्याओं की तरह ही काम किया जा सकता है और $A_1A_1'=I$ संबंध के उपयोग से हम देखते हैं कि —

$$S+S'=\frac{I-A_1}{I+A_1}+\frac{I-A_1'}{I+A_1'}$$

$$\frac{2I-2A_1A_1'}{I+A_1+A_1'+A_1A_1'}=0.$$

अतएव, जब S की परिभाषा (10) से दी जाती है, हमारे पास $S=-S'$ होगा; अर्थात् S एक विषम सममित मैट्रिक्स होगा। इसके अतिरिक्त, (10) से,

$$S+SA_1=I-A_1$$

और चूंकि $I+S$ व्युत्क्रमणीय‡ है तथा $I-S$, $I+S$ क्रमविनिमय वाले हैं हम देखते हैं कि

$$A_1=(I-S)(I+S)^{-1}, \qquad (12)$$

---

† इसी अध्याय के प्रमेय 56 में पादटिप्पणी से तुलना कीजिए।

‡ §2.2 से तुलना कीजिए।

(12) के दाएँ तरफ के दोनों मैट्रिक्सों की कोटि* से कोई अंतर नहीं पड़ता ।

इस प्रकार प्रमेय सिद्ध हो चुका है ।

2.4. जहाँ तक वास्तविक अवयवों वाले मैट्रिक्सों से संबंध है प्रमेय 56 और 57 के सम्मिलित अध्ययन से हम देखते हैं कि—

'यदि S कोई वास्तविक विषम-सममित मैट्रिक्स है तो

$$A=J(I-S)(I+S)^{-1}$$

एक वास्तविक लांबिक मैट्रिक्स होगा, और प्रत्येक वास्तविक लांबिक मैट्रिक्स को इसी तरह लिखा जा सकता है ।'

2.5. प्रमेय 58—किसी वास्तविक लांबिक मैट्रिक्स के अभिलक्षण मूलों का मापांक एक होता है ।

मान लीजिए $[a_{rs}]$ एक वास्तविक लांबिक मैट्रिक्स है । तो (दसवें अध्याय, §7 से) यदि λ, मैट्रिक्स का कोई अभिलक्षण मूल है तो

$$\lambda x_r=a_{r1}x_1+\cdots+a_{rn}x_n \ (r=1,\cdots,n) \qquad (13)$$

समीकरणों का $x_1=\cdots=x_n=0$ के अलावा एक साधन $x_1,\cdots,x_n$ होगा ।

यह आवश्यक नहीं है कि ये x वास्तविक ही हों लेकिन चूंकि a_{rs} वास्तविक है, (13) के संयुग्मी संमिश्र से हम यह भी देखते हैं कि

$$\bar{\lambda}\bar{x}_r=a_{r1}\bar{x}_1+\cdots+a_{rn}\bar{x}_n(r=1,\cdots,n)$$

§1 के लांबिक संबंध (1) के उपयोग से हम देखते हैं कि—

$$\lambda\bar{\lambda}\sum_{r=1}^{n} x_r\bar{x}_r=\sum_{r=1}^{n} x_r\bar{x}_r,$$

लेकिन $x_1,\cdots x_n$ में सभी शून्य नहीं हैं, और इसलिए $\Sigma x_r\bar{x}_r > 0$ होगा । अतएव, $\lambda\bar{\lambda}=1$ होगा जिससे प्रमेय सिद्ध हो जाता है ।

प्रश्नावली तेरह

1. सिद्ध कीजिए कि मैट्रिक्स

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

लांबिक है । इसके अभिलक्षण मूल ज्ञात कीजिए और जाँचकर सिद्ध कीजिए कि प्रमेय 54, 55 और 58 इस मैट्रिक्स के लिए लागू होते हैं ।

---

*प्रमेय 56 की पाद टिप्पणी से तुलना कीजिए ।

2. सिद्ध कीजिए कि मैट्रिक्स

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

लांबिक है।

3. सिद्ध कीजिए कि जब

$$S=\begin{bmatrix} 0 & -c & -b \\ c & 0 & -a \\ b & a & 0 \end{bmatrix},$$

हो तो $(I-S)\ (I+S)^{-1}$ यों होगा—

$$\begin{bmatrix} \frac{1+a^2-b^2-c^2}{1+a^2+b^2+c^2} & \frac{2(c-ab)}{1+a^2+b^2+c^2} & \frac{2(ac+b)}{1+a^2+b^2+c^2} \\ \frac{-2(c+ab)}{1+a^2+b^2+c^2} & \frac{1-a^2+b^2-c^2}{1+a^2+b^2+c^2} & \frac{2(a-bc)}{1+a^2+b^2+c^2} \\ \frac{2(ac-b)}{1+a^2+b^2+c^2} & \frac{-2(a+bc)}{1+a^2+b^2+c^2} & \frac{1-a^2-b^2+c^2}{1+a^2+b^2+c^2} \end{bmatrix}$$

अतएव तीन चरों † का व्यापक लांबिक रूपांतरण ज्ञात कीजिए।

4. A एक दिए हुए सममित मैट्रिक्स को प्रकट करता है; $X'AX$, A का सहचारी द्विघाती समघात है; S एक ऐसा विषम-सममित मैट्रिक्स है कि $I+SA$ व्युत्क्रमणीय है। सिद्ध कीजिए, कि जब

$$X=\frac{I-SA}{I+SA}\,Y,$$

हो तो, $X'AX=Y'AY.$

5. (कुछ कठिन) ‡ सिद्ध कीजिए कि, जब A सममित, S विषम-सममित, और $R=(A+S)^{-1}\ (A-S)$ हो तो,

$$R'(A+S)R=A+S,\quad R'(A-S)R=A-S;$$

$$R'AR=A,\quad R'SR=S.$$

यह भी सिद्ध कीजिए कि जब $X=RY$ तो,

$$X'AX=Y'AY.$$

---

† लम्ब, हायर मैकेनिक्स, अध्याय 1, प्रश्न 20 और 21 से तुलना कीजिए जहाँ रूपांतरण पर शुद्ध गतिकी (kinematics) की दृष्टि से विचार किया गया है।

‡ इन परिणामों को टर्नबुल, थ्योरी आफ डिटर्मिनेन्ट्स, मैट्रिसेज एण्ड इनवेरिएन्ट्स् में सिद्ध किया गया है।

6. प्रमेय 55 को इस रीति से सिद्ध कीजिए। मान लीजिए A कोई लांबिक मैट्रिक्स है। डिटर्मिनेन्ट $|A-\lambda I|$ को $|A|$ से गुणा कीजिए और, परिणामी डिटर्मिनेन्ट में, $\lambda'=\frac{1}{\lambda}$ रखिए।

7. एक रूपांतरण $x=UX$, $\bar{x}=\bar{U}\bar{X}$ जो

$$\Sigma x_r \bar{x}_r=\Sigma X_r \bar{X}_r$$

कर दे, ऐकिक रूपांतरण (unitary transformation) कहलाता है। सिद्ध कीजिए कि किसी ऐकिक रूपांतरण का लक्षण मैट्रिक्स समीकरण $U\bar{U}'=I$ है।

8. सिद्ध कीजिए कि दो ऐकिक रूपांतरणों का गुणनफल स्वयं भी ऐकिक होता है।

9. सिद्ध कीजिए कि किसी ऐकिक रूपान्त रणका मापांक M, समीकरण $M\bar{M}=I$ को संतुष्ट करता है।

10. सिद्ध कीजिए कि किसी ऐकिक रूपान्तरण के प्रत्येक अभिलक्षण मूल का रूप e^{ix} होता है, जहाँ α वास्तविक है।

अध्याय 14

निश्चर व सहचर (Invariants and Covariants)

1. परिचय

1.1. एक छोटी-सी पुस्तक के केवल एक अध्याय में निश्चरों और सहचरों का विस्तृत अध्ययन संभव नहीं है। इस प्रकार के अध्ययन के लिए एक पूरे ग्रंथ की आवश्यकता होगी और ऐसी पुस्तकें मिल जाती हैं जिनमें केवल इनकी ही चर्चा हो। हमारा प्रयत्न यहाँ केवल इतना ही होगा कि इनके विचारों से अवगत हो लें और उनका इतना विस्तार कर लें कि पाठक उनको बीजगणित या वैश्लेषिक ज्यामिति में किसी भी काम में ला सकें।

1.2. कुछ विशिष निश्चरों को हम अध्ययन के दौरान देख चुके हैं। प्रमेय 39 में हमने यह सिद्ध किया था कि जब किसी द्विघाती समघात के चरों को किसी एकघाती रूपांतरण द्वारा बदला जाता है तो समघात के विवेचक में, रूपांतरण के मापांक के वर्ग से गुणा हो जाता है। एकघाती रूपांतरण के फलस्वरूप, मापांक के किसी घात द्वारा गुणा हो जाना—'निश्चर' की पहचान है। यह आवश्यक नहीं है कि वह घात वर्ग ही हो। सच पूछो तो, इस शब्द से उस वस्तु का अर्थ निकलना चाहिए जो कभी बदलती ही नहीं; लेकिन वास्तव में, इसका प्रयोग उन अर्थों में किया जाने लगा है जब कि चरों के एकघाती रूपांतरण के पश्चात् परिवर्तन केवल इतना होता है, रूपांतरण के मापांक के एक घात से गुणा हो जाता है। चरों के किसी एकघाती रूपांतरण के बाद भी जिसमें कुछ भी परिवर्तन नहीं होता उसे **'निरपेक्ष निश्चर'** (Absolute Invariant) कहते हैं।

1.3. बीजीय समघात (algebraic form) **की परिभाषा**—'निश्चर' की सूक्ष्म परिभाषा देने से पहले यह आवश्यक है कि कुछ ऐसे तकनीकी शब्दों की व्याख्या दे दी जाए जो बीच-बीच में उपयोग में आ जाते हैं।

परिभाषा 10—पदों का एक योग,

$$\Sigma\, a_{\alpha,\beta,\cdots,\lambda} \quad \frac{k\,!}{\alpha\,!\,\beta\,!\,\ldots\,\lambda\,!}\, x^{\alpha} y^{\beta} \ldots t^{\lambda}, \tag{1}$$

जिसमें प्रत्येक पद x, y, . . . ,t आदि n चरों में k घात का है, जहाँ समस्त a स्वेच्छ अचर हैं और योग को α, β,. . .,λ के मानों के समस्त ऐसे पूर्णांक या शून्य के समुच्चयों लिए लिया गया है जो प्रतिबंध

$$0\leqslant\alpha\leqslant k,\cdots,\ 0\leqslant\lambda\leqslant k,\ \alpha+\beta+\cdots+\lambda=k, \tag{2}$$

को संतुष्ट करते हों,

x, y. . .,t चरों में k घात का एक बीजीय समघात कहलाता है।

उदाहरण के लिए, $ax^2+2hxy+by^2$, x और y में 2 घात का एक बीजीय

समघात है, तथा

$$\sum_{r=0}^{n} a_r \frac{n!}{r!\,(n-r)!} x^r y^{n-r} \qquad (3)$$

x और y में n घात का एक बीजीय समघात है ।

(1) में दिए गए बहुपद (multinomial) गुणांक $k!/\alpha! \ldots \lambda!$ और (3) में दिए गए द्विपद (binomial) गुणांक $n!/r!(n-r)!$ का होना आवश्यक नहीं है लेकिन उनके फलस्वरूप समघातों के सिद्धान्त के अध्ययन में सुविधा हो जाती है ।

1.4. संकेतन— $F(a, x)$, तथा इसी प्रकार के अन्य संकेतन जैसे $\phi(b, X)$ का उपयोग हम एक बीजीय समघात को प्रकट करने के लिए करेंगे; संकेतन $F(a, x)$ में अकेला a, (1) और (3) के विभिन्न अचरों का प्रतीक तथा अकेला x विभिन्न चरों का प्रतीक है । यदि घात k और चरों की संख्या n की पहचान भी देनी हो तो हम $F(a,x)_n^k$ का उपयोग करेंगे ।

समघात (3) को प्रकट करने का एक दूसरा संकेतन

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n)(x,y)^n, \qquad (4)$$

और समघात (1) को प्रकट करने का एक अन्य संकेतन

$$(a_0, \ldots)(x, \ldots, t)^k \text{ या } (a_0, \ldots)(x_1, \ldots, x_n)^k,$$

भी है जिनका कभी-कभी उपयोग होता है । इस संकेतन में घातांक (index) से समघात के घात का मतलब निकलता है और चरों की संख्या या तो स्पष्ट रूप से दिखला दी जाती है जैसे (4) में है, और या संदर्भ से जानी जाती है ।

n पंक्तियों के एकस्तंभीय मैट्रिक्सों को प्रकट करने के लिए अक्षरों का प्रयोग क्लेरेन्डन (Clarendon) टाइप में किया जाएगा जैसे, **x** या **X**, जहाँ **x** या **X** की पंक्तियों के अवयव, विचाराधीन बीजीय समघात के विभिन्न चर हैं ।

$x_1, \ldots, x_n$ चरों से $X_1, \ldots, X_n$ चरों में मानक एकघाती रूपांतरण अर्थात्

$$x_r = l_{r1}X_1 + \cdots + l_{rn}X_n \quad (r = 1, \ldots, n), \qquad (5)$$

को प्रकट करने के लिए,

$$\mathbf{x} = M\mathbf{X}, \qquad (6)$$

का उपयोग होगा जहाँ M वास्तव में (5) के गुणांकों l_{rs} के मैट्रिक्स को प्रकट करता है । पिछले अध्यायों की तरह, $|M|$ उस डिटर्मिनेन्ट को प्रकट करता है जिसके अवयव वही हैं जो मैट्रिक्स M के अवयव हैं ।

किसी समघात

$$F(a, x) \equiv (a_0, \ldots)(x_1, \ldots, x_n)^k, \qquad (7)$$

में (5) के प्रतिस्थापनों (substitutions) से हमें $X_1, \cdots, X_n$ में k घात का एक समघात प्राप्त होता है : इस समघात को हम

$$G(A,X) \equiv (A_0, \cdots)(X_1, \cdots, X_n)^k \qquad (8)$$

प्रकट करेंगे।

(8) के अचर A, (7) के अचर a और गुणांकों l_{rs} पर आश्रित हैं। व्युत्पत्ति की रीति के अनुसार, x चरों के समस्त मानों के लिए,

$$G(A, X) \equiv F(a, x)$$

उदाहरण के लिए, मान लीजिए

$$F(a, x)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2,$$
$$x_1=l_{11}X_1+l_{12}X_2,\ x_2=l_{21}X_1+l_{22}X_2;$$

हो तो,

$$F(a, x) \equiv G(A, X)=A_{11}X_1^2+2A_{12}X_1X_2+A_{22}X_2^2,$$

जहाँ

$$A_{11} = a_{11}l^2_{11}+2a_{12}l_{11}l_{21}+a_{22}l_{21}^2,$$
$$A_{12} = a_{11}l_{11}l_{12}+a_{12}(l_{11}l_{22}+l_{21}l_{12})+a_{22}l_{21}l_{22},$$
$$A_{22}=a_{11}l_{12}^2+2a_{12}l_{12}l_{22}+a_{22}l_{22}^2.$$

बाद में, हम A के लिए वास्तविक व्यंजकों को a के पदों में व्यक्त करना चाहेंगे : इस समय हमारे लिए इतना ही याद रखना काफी होगा कि यदि आवश्यक हो तो ऐसा किया जा सकता है और यह कि A वास्तव में a में एकघाती होते हैं।

1.5. निश्चर की परिभाषा

परिभाषा 11—**बीजीय समघात F(a, x) के गुणांक a के किसी फलन को समघात का एक निश्चर कहा जाता है यदि, (6) के मैट्रिक्स M के कुछ भी होने पर, समघात G(A, X) के गुणांक A का वही फलन (गुणांक a के) मूल फलन तथा डिटर्मिनेन्ट | M | के किसी घात के गुणा के बराबर हो। यहाँ विचाराधीन | M | का घात M से स्वतंत्र है।**

उदाहरण के लिए §1.4 में,

$$A_{11}A_{22}-A_{12}^2=|M|^2(a_{11}a_{22}-a_{12}^2),$$

इस परिणाम को परिश्रम क के हिसाबी मेहनत से या प्रमेय 39 की सहायता से प्राप्त किया जा सकता है। अतएव, परिभाषा 11 के शब्दों के अनुसार, $a_{11}a_{12}-a_{12}^2$, बीजीय समघात $a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$ का एक निश्चर है।

एक बात और यह है कि केवल एक समघात F(a, x) और इसके रूपांतर (Transform) G(A, X) पर विचार करने के बदले, अनेकों समघात

$F_1(a,x)\ldots,F_r(a,x)$ और उनके रूपांतर $G_1(A,X),\ldots,G_r(A,X)$ पर विचार किया जा सकता है : जैसा पहले किया गया है, $F_r(a,x)$ में x के लिए X के पदों में प्रतिस्थापन के बाद जो परिणाम आता है उसे हम $G_r(A,X)$ लिखेंगे जब कि प्रतिस्थापन $x=MX$ है ।

परिभाषा 12—**कुछ बीजीय समघात $F_r(a,x)$ के गुणांकों a के किसी फलन को समघातों का एक निश्चर (कभी-कभी भी एक संयुक्त-निश्चर) कहा जाता है यदि, रूपांतरण $x = MX$ के मैट्रिक्स M के कुछ भी होने पर, परिणामी समघातों $G_r(A,X)$ के गुणांकों A का वही फलन (गुणांकों a के) मूल फलन तथा डिटर्मिनेन्ट | M | के किसी विशेष घात के गुणा के बराबर हो।**

उदाहरण के लिए, यदि

$$F_1(a,x) = a_1x+b_1y,\quad F_2(a,x) = a_2x+b_2y, \qquad (9)$$

हों और रूपांतरण $x = MX$ हो जो पूरे रूप में यों है—

$$x = \alpha_1X+\beta_1Y,\quad y=\alpha_2X+\beta_2Y, \qquad (10)$$

जिनके फलस्वरूप,

$$F_1(a,x) = G_1(A,X) = (a_1\alpha_1+b_1\alpha_2)X+(a_1\beta_1+b_1\beta_2)Y,$$

$$F_2(a,x) = G_2(A,X) = (a_2\alpha_1+b_2\alpha_2)X+(a_2\beta_1+b_2\beta_2)Y,$$

हम देखते हैं कि,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\alpha_2 & a_1\beta_1+b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1+b_2\alpha_2 & a_2\beta_1+b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \qquad (11)$$

अतएव, परिभाषा 12 से, $a_1b_2-a_2b_1$ दो समघात a_1x+b_1y, a_2x+b_2y का एक संयुक्त-निश्चर है ।

दो रूपांतरणों का 'गुणनफल' बनाने के नियम का यह एक उदाहरण है : यदि हम (9) को F_1 और F_2 चरों से x और y चरों में रूपान्तरण मानें, और (10) को x और y से X और Y में रूपांतरण मानें तो (11), दसवें अध्याय के §3.3 में सिद्ध किए हुए परिणाम का केवल एक कथन ही होगा ।

1.6. सहचर—निश्चर तो केवल गुणांकों का ही कोई फलन होता है । कुछ ऐसे फलन भी होते हैं जो गुणांकों पर तो आश्रित होते ही हैं, साथ ही एक समघात $F(a,x)$, या अनेकों समघात $F_r(a,x)$, के चरों पर भी आश्रित होते हैं और जो प्रतिस्थापन $x=MX$ द्वारा चरों में परिवर्तन के बाद भी, | M | के किसी घात से गुणन के अलावा, निश्चरों की तरह ही अपरिवर्तित रहते हैं। ऐसे फलन **सहचर** (Covariants) कहलाते हैं ।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए u और v, x और y चरों में समघात हैं। इनमें,

$$x=l_1X+m_1Y, \quad y=l_2X+m_2Y,$$

प्रतिस्थापन कीजिए जिससे u, v दोनों X और Y के पदों में व्यक्त हो जाएँ। तो अवकल गणित के नियमों से,

$$\frac{\partial u}{\partial X}=l_1\frac{\partial u}{\partial x}+l_2\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial X}=l_1\frac{\partial v}{\partial x}+l_2\frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y}=m_1\frac{\partial u}{\partial x}+m_2\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial Y}=m_1\frac{\partial v}{\partial x}+m\frac{\partial v}{\partial v}$$

डिटर्मिनेन्टों के गुणन के नियमों से यह स्पष्ट हो जाता है कि

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{12}$$

(12) के महत्व का आभास उसको पूरा-पूरा लिखने पर होता है। मान लीजिए,

$$\left.\begin{aligned} u&=a_0x^n+na_1x^{n-1}y+\ldots+a_ny^n, \\ v&=b_0x^n+nb_1x^{n-1}y+\ldots+b_ny^n, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

और, X, Y के पदों में व्यक्त करने पर,

$$u=A_0X^n+nA_1X^{n-1}Y+\ldots+A_nY^n,$$
$$v=B_0X^n+nB_1X^{n-1}Y+\ldots+B_nY^n.$$

तो (12) का नया रूप इस तरह का हो जाता है—

$$\begin{vmatrix} A_0X^{n-1}+\ldots+A_{n-1}Y^{n-1} & A_1X^{n-1}+\ldots+A_nY^{n-1} \\ B_0X^{n-1}+\ldots+B_{n-1}Y^{n-1} & B_1X^{n-1}+\ldots+B_nY^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_0x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}y^{n-1} & a_1x^{n-1}+\ldots+a_ny^{n-1} \\ b_0x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}y^{n-1} & b_1x^{n-1}+\ldots+b_ny^{n-1} \end{vmatrix}$$

फलन

$$\begin{vmatrix} a_0x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}y^{n-1} & a_1x^{n-1}+\ldots+a_ny^{n-1} \\ b_0x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}y^{n-1} & b_1x^{n-1}+\ldots+b_ny^{n-1} \end{vmatrix}, \tag{14}$$

जो u, v समघातों के a_r, b_r अचरों पर और x, y चरों पर आश्रित है। खंड $l_1m_2-l_2m_1$ को यदि छोड़ दिया जाए तो वह a_r, b_r अचरों के A_r, B_r अचरों द्वारा और x, y चरों के X, Y चरों द्वारा बदले जाने के बाद भी अपरिवर्तित रहता है। इसीलिए हम यह कहते हैं कि (14), समघात u, v का एक सहचर है।

1.7. परिभाषाओं पर टिप्पणी:—जब एक निश्चर की परिभाषा इस प्रकार दी जाती है कि—

'किसी समघात $F(a,x)$ के गुणांकों a का एक फलन, जो रूपांतर $G(A,X)$ के गुणांकों A के उसी फलन तथा **एक ऐसे खंड के गुणनफल के बराबर है जो केवल रूपांतरण के अक्षरों पर आश्रित होता है।**'

यह सिद्ध किया जा सकता है कि विचाराधीन खंड को अवश्य ही रूपांतरण के मापांक का कोई घात होना चाहिए।

फिलहाल विषय के प्रारंभिक विचार-विमर्श में हमने खंड के लिए इस संभावना को छोड़ दिया है कि वह $|M|$ के किसी घात के अलावा और कुछ भी हो सकता है। फिर भी यह ध्यान देने योग्य है कि खंड की प्रकृति के बाद में अन्ततः इसी मर्यादा को रखते हुए कि वह मापांक का कोई घात होगा, हम परिभाषा को विस्तृत कर सकते हैं।

2. निश्चर और सहचरों के उदाहरण

2.1. जैकोबियन—मान लीजिए $u, v, \ldots, w$ आदि, $x, y, \ldots z$ आदि n चरों में समघात हैं। तो डिटर्मिनेन्ट

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x & \cdot & \cdot & w_x \\ u_y & v_y & \cdot & \cdot & w_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_z & v_z & \cdot & \cdot & w_z \end{vmatrix}$$

को उन n समघातों का जैकोबियन कहते हैं, जहाँ u_x u_y, ... आदि $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y, \ldots$ को प्रकट करते हैं। इसको प्रायः इस प्रकार लिखते हैं :—

$$\frac{\partial(u, v, \ldots, w)}{\partial(x, y, \ldots, z)}$$

§1.6. के तर्कों से यह भी देखा जा सकता है कि यह $u, v, \ldots w$, समघातों का ही एक सहचर है, और यदि $x = MX$ हो तो,

$$\frac{\partial(u, v, \ldots, w)}{\partial(X, Y, \ldots, Z)} = |M| \frac{\partial(u, v, \ldots, w)}{\partial(x, y, \ldots, z)} \qquad (1)$$

2.2. हेसियन— u, मान लीजिए $x, y, \ldots, z$ चरों में एक समघात है और u_{xx}, u_{xy}, ... आदि $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^2 u/\partial x \partial y$, ... को प्रकट करते हैं। तो डिटर्मिनेन्ट—

$$\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} & \cdot & \cdot & u_{xz} \\ u_{yx} & u_{yy} & \cdot & \cdot & u_{yz} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{zx} & u_{zy} & \cdot & \cdot & u_{zz} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

को u का हेसियन कहते हैं और यह u का एक सहचर होता है; वास्तव में, यदि हम (2) का प्रतीक $H(u;x)$ रखें, तो हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि

$$H(u;X)=|M|^2\ H(u;x) \qquad (3)$$

क्योंकि, u_x, u_y, . . . समघातों के जैकोबियन को ध्यान में रखकर, और उनको u_1, u_2, ... से प्रकट कर हम यह देखते हैं कि §2.1 से,

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots)}{\partial(X, Y, \ldots)} = |M|\ \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots)}{\partial(x, y, \ldots)} \qquad (4)$$

लेकिन,

$$\frac{\partial u_1}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial u}{\partial x},$$

और यदि,

$$x = l_1X + l_2Y + \cdots,$$
$$y = m_1X + m_2Y + \cdots,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

तो

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X} &= l_1\frac{\partial}{\partial x} + m_1\frac{\partial}{\partial y} + \cdots,\\ \frac{\partial}{\partial Y} &= l_2\frac{\partial}{\partial x} + m_2\frac{\partial}{\partial y} + \cdots,\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

अतएव,

$$\begin{vmatrix} u_{XX} & u_{XY} & \cdot & \cdot & u_{XZ} \\ u_{YX} & u_{YY} & \cdot & \cdot & u_{YZ} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{ZX} & u_{ZY} & \cdot & \cdot & u_{ZZ} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_2 & m_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_n & m_n & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u_{xX} & u_{yX} & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{xY} & u_{yY} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{xZ} & u_{yZ} & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

जैसा कि इन दो डिटर्मिनेन्टों को पंक्तियों से गुणा करके और (5) को लागू करके देखा जा सकता है। दूसरे शब्दों में,

$$H(u;X) = |M|\ \frac{\partial(u_1, u_2, \cdots)}{\partial(X, Y, \cdots)},$$

जिससे, (4) के उपयोग के पश्चात्

$$H(u;X) = |M|^2\ H(u;x).$$

2.3. एकघाती समघातों का विलोपनफल (eliminant)—§2.1 के समघात $u, v, \cdots, w$ जब चरों में एकघाती होते हैं तो हम इस परिणाम पर पहुँचते हैं कि

$$a_{r1}\,x_1 + \cdots + a_{rn}\,x_n \quad (r = 1, \cdots, n)$$

एकघाती समघातों का डिटर्मिनेंट $|a_{rs}|$ एक निश्चर होता है । इसको कभी-कभी समघातों का **विलोपनफल** कहते हैं । प्रमेय 11 के अनुसार, विलोपनफल का शून्य हो जाना एक ऐसा आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध है कि

$$a_{r1}x_1+\cdots+a_{rn}x_n=0 \qquad (r=1,\cdots,n)$$

समीकरणों का $x_1=\cdots=x_n=0$ के अलावा भी कोई साधन हो सके ।

2.4. द्विघाती समघातों के विवेचक—§2.2 का समघात u जब एक द्विघाती समघात हो तो उसका हेसियन चरों से स्वतंत्र और अतएव एक निश्चर होता है । जब

$$u=\Sigma a_{rs}x_r x_s \;(a_{rs}=a_{sr}), \qquad (6)$$

हो तो हम देखते है कि,

$$\partial^2 u/\partial x_r \partial x_s=2a_{rs},$$

फलस्वरूप (6) का हेसियन, 2 का एक घात होने के अलावा, डिटर्मिनेन्ट $|a_{rs}|$ भी अर्थात् द्विघाती समघात का विवेचक है । प्रमेय 39 की यह एक दूसरी उपपत्ति है ।

2.5. किसी द्विचर त्रिघाती (binary cubic) के निश्चर और सहचर—दो चरों में किसी समघात को प्रायः द्विचर समघात कहते हैं : इस प्रकार एक व्यापक द्विचर त्रिघाती यों होगा—

$$a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3. \qquad (7)$$

हम एक सहचर से एक दूसरा सहचर और एक निश्चर निगमन की विधि से प्राप्त कर सकते हैं । (7) का हेसियन एक सहचर होता है (दे० § 2.2); संख्यात्मक खंडों को छोड़कर यह निम्नलिखित है—

$$\begin{vmatrix} a_0x+a_1y & a_1x+a_2y \\ a_1x+a_2y & a_2x+a_3y \end{vmatrix},$$

अर्थात्

$$(a_0a_2-a_1^2)x^2+(a_0a_3-a_1a_2)xy+(a_1a_3-a_2^2)y^2. \qquad (8)$$

(8) का विवेचक (8) का एक निश्चर है । हम यह भी आशा कर सकते हैं कि वह (7) का भी एक निश्चर होगा† । (§3.6 में हम इस आशय का एक व्यापक प्रमेय भी देंगे ।) विवेचक यह है—

$$\begin{vmatrix} a_0a_2-a_1^2 & \frac{1}{2}(a_0a_3-a_1a_2) \\ \frac{1}{2}(a_0a_3-a_1a_2) & a_1a_3-a_2^2 \end{vmatrix} \qquad (9)$$

† पाठक के विचारों में तब स्पष्टता आ जाएगी यदि वह '(7) का एक निश्चर है ।' '(8) का एक निश्चर है ।' आदि वाक्यांशों का सूक्ष्म और सही अर्थ लिखें

इसके अतिरिक्त (7) और (8) का जैकोबियन, जिसके विषय में हम यह आशा कर सकते हैं कि वह स्वयं (7) का एक सहचर होगा,† संख्यात्मक खंडों को छोड़कर इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$\begin{vmatrix} a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2 & a_1x^2+2a_2xy+a_3y^2 \\ 2(a_0a_2-a_1^2)x+(a_0a_3-a_1a_2)y & (a_0a_3-a_1a_2)x+2(a_1a_3-a_2^2)y \end{vmatrix}$$

अर्थात् $$(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3)x^3+3(a_0a_1a_3-2a_0a_2^2+a_1^2a_2)x^2y$$
$$+3(2a_1^2a_3-a_0a_2a_3-a_1a_2^2)xy^2+(3a_1a_2a_3-a_0a_3^2-2a_2^3)y^3. \qquad (10)$$

बाद में यह स्पष्ट किया जाएगा कि (7), (8), (9), और (10) में एक बीजीय संबंध होता है। तब तक हम, (8) और (10) सहचरों के गुणांकों से संबद्ध एक ऐसे रोचक तथ्य पर ध्यान देंगे जो उच्च सिद्धांत में काफी महत्व का हो जाता है।

यदि हम एक द्विघाती सहचर के लिए $c_0x^2+c_1xy+\frac{1}{2}c_2y^2$,

एक त्रिघाती सहचर के लिए $c_0x^3+c_1x^2y+\frac{1}{2}c_2xy^2+\frac{1}{2.3}c_3y^3$,

और इसी प्रकार अधिक घात के सहचरों के लिए भी व्यञ्जक लिखें तो हम (10) को ध्यान में रखते हुए यह देख सकते हैं कि गुणांक c_r, संख्याओं का बिना किसी क्रम के एक समुच्चय न होकर, वास्तव में, निम्नलिखित सूत्र के द्वारा c_0 के पदों में दिया जा सकता है—

$$c_{r+1}=\left\{pa_1\frac{\partial}{\partial a_0}+(p-1)a_2\frac{\partial}{\partial a_1}+\cdots+a_p\frac{\partial}{\partial a_{p-1}}\right\}c_r, \qquad (11)$$

जहाँ p समघात u का घात है। इस प्रकार, यदि हम त्रिघात (7) से शुरू करें जिसके लिए $p=3$ है, और फिर सहचर (8) पर विचार कर, जिसके फलस्वरूप $c_0=a_0a_2-a_1^2$, तो हम देखते हैं कि

$$3a_1\frac{\partial c_0}{\partial a_0}+2a_2\frac{\partial c_0}{\partial a_1}+a_3\frac{\partial c_0}{\partial a_2}=a_0a_3-a_1a_2=c_1$$

और $$3a_1\frac{\partial c_1}{\partial a_0}+2a_2\frac{\partial c_1}{\partial a_1}+a_3\frac{\partial c_1}{\partial a_2}=2(a_1a_3-a_2^2)=c_2$$

और इस प्रकार सारे का सारा सहचर (8), अवकलनों के द्वारा अपने अग्र पद $(a_0a_2-a_1^2)x^2$ द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।

अभ्यास—सिद्ध कीजिए कि यदि (10) को

$$c_0x^3+c_1x^2y+\tfrac{1}{2}c_2xy^2+\tfrac{1}{6}c_3y^3,$$

†§§3.6, 3.7 से तुलना कीजिए।

लिखा जाए तो,

$$c_{r+1}=3a_1\frac{\partial c_r}{\partial a_0}+2a_2\frac{\quad}{\partial a_1}+a_3\frac{\partial c_r}{\partial a_2}\ (r=0\ \ 1, 2)$$

2.6. संयुक्त निश्चर बनाने की एक विधि—

मान लीजिए: $u=F(a,x)=(a_0,\cdots,a_m)(x_1,\cdots,x_n)^k$, (12)

और मान लीजिए कि a-ओं का कोई विशेष बहुपद फलन जैसे

$$\phi\,(a_0,\cdots,a_m),$$

ऐसा है जो F(a,x) का एक निश्चर है। दूसरे शब्दों में, (12) में $x=MX$ के प्रतिस्थापन से समघात

$$u=G(A,X)=(A_0,\ldots,A_m)\,(X_1,\ldots X_n)^k, \qquad (13)$$

प्राप्त हो जाता है और हम यह मान लेते हैं कि (12) का a और (13) का A इस संबंध को संतुष्ट करते हैं—

$$\phi\,(A_0\ldots,\ A_m)=|M|^s\,\phi\,(a_0,\ldots,a_m), \qquad (14)$$

जहाँ s कोई नियत अचर है जो मैट्रिक्स M से स्वतंत्र है।

अब (12) को $x_1,\ldots,x_n$ आदि n चरों में k घात के किसी समघात की तरह समझा जा सकता है और (14) को इस प्रकार के किसी समघात के गुणांकों के बारे में एक कथन माना जा सकता है। इस प्रकार, यदि

$v=F(a',x)=(a'_0,\ldots,a'_m)\,(x_1,\ldots,x_n)^k$ को $x=MX$ द्वारा

$v=G(A',X)=(A_0',\ldots\ldots A'_m)\ \ (X_1,\ldots,X_n)^k$,

में रूपान्तरित किया जाए तो गुणांक a', A' इस संबंध को संतुष्ट करेंगे—

$$\phi\,(A_0',\ldots A'_m)=|M|^s\,\phi(a'_0,\ldots,a'_m) \qquad (15)$$

इसी प्रकार, जब λ एक स्वेच्छ अचर हो, तो $u+\lambda v$, $x_1,\ldots x_n$ चरों में k घात का एक समघात होगा। इसको यों लिख सकते है—

$$(a_0+\lambda a'_0,\ldots,a_m+\lambda a'_m)\,(x_1,\ldots,x_n)^k$$

और, $x=MX$ रूपान्तरण के बाद, इसका रूप यों हो जाता है—

$$(A_0,\ldots,A_m)\ (X_1,\ldots,X_n)^k+\lambda(A'_0,\ldots,A'm)\ \ (X_1,\ldots,X_n)^k$$

अर्थात्

$$(A_0,+\lambda A'_0,\ldots,\ A_m+\lambda A'_m)\ \ (X_1,\ldots,X_n)^k$$

जिस तरह (15) को, (14) के संकेतन का ही केवल परिवर्तित रूप कह सकते हैं उसी तरह समघात $u+\lambda v$ के निश्चर ϕ पर विचार कर हम देखते हैं कि $\phi(A_0+\lambda A'_0,\ldots,A_m+\lambda A'm)\ \ |M|^s\,\phi\ \ |(a_0+\lambda a'_0,\ldots,a_m+\lambda a'_m)$, जो (14) के संकेतन का ही परिवर्तित रूप है। (16)

(16) का प्रत्येक पक्ष λ में एक ऐसा बहुपद है जिसके गुणांक A, a, और |M| के फलन हैं; इसके अतिरिक्त (16), λ के समस्त मानों के लिए सत्य है और इसलिए (16) के प्रत्येक पक्ष में $\lambda^0, \lambda, \lambda^2, \ldots$ के गुणांक बराबर होंगे, अतएव

$$\phi(a_0+\lambda a_0', \cdots, a_m+\lambda a'_m)$$

के प्रसार में λ के प्रत्येक घात का गुणांक, u और v का एक संयुक्त निश्चर होगा; क्योंकि यदि यह गुणांक

$$\phi_r(a_0, \cdots, a_m, a'_0, \cdots, a'_m),$$

है तो (16) से

$$\phi_r(A_0, \cdots, A_m, A'_0, \cdots, A'_m) = |M|^s \phi_r(a_0, \cdots, a_m, a'_0, \cdots, a'_m) \quad (17)$$

अवकलन गणित के नियमों से λ के घातों के गुणांकों को सरलता से प्राप्त किया जा सकता है। यदि हम इस प्रकार लिखें—

$$b_0 = a_0+\lambda a'_0, \cdots, \; b_m = a_m+\lambda a'_m$$

तो,
$$\frac{d}{d\lambda}\phi(a_0+\lambda a'_0, \cdots, a_m+\lambda a'_m)$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial b_0}\frac{db_0}{d\lambda} + \cdots + \frac{\partial\phi}{\partial b_m}\frac{db_m}{d\lambda}$$

$$= a'_0\frac{\partial\phi}{\partial b_0} + \cdots + a'_m\frac{\partial\phi}{\partial b_m}, \quad (18)$$

जब $\lambda=0$ हो तो (18) का मान यों दिया जा सकता है —

$$\left(a'_0\frac{\partial}{\partial a_0} + \cdots + a'_m\frac{\partial}{\partial a_m}\right)\phi(a_0, \cdots, a_m) \quad (19)$$

अतएव, मैक्लोरिन प्रमेय से,

$$\phi(a_0+\lambda a'_0, \cdots, a_m+\lambda a'_m)$$

$$= \phi(a_0 \cdots, a_m) + \lambda\left(a'_0\frac{\partial}{\partial a_0} + \cdots + a'_m\frac{\partial}{\partial a_m}\right)\phi(a_0, \cdots a_m)$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2!}\left(a_0'\frac{\partial}{\partial a_0} + \ldots + a'_m\frac{\partial}{\partial a_m}\right)^2\phi(a_0, \cdots, a_m) + \cdots,$$

इस प्रसार में सीमित पद ही होंगे क्योंकि $\phi(a_0+\lambda a'_0, \cdots, a_m+\lambda a'_m)$ λ में एक बहुपद है। अतएव, (17) को ध्यान में रखते हुए हम देखते हैं कि—

$$\left(A_{0'}\frac{\partial}{\partial A_0} + \cdots + A'_m\frac{\partial}{\partial A_m}\right)^r \phi(A_0, \cdots, A_m)$$

$$= |M|^s\left(a_0'\frac{\partial}{\partial a_0} + \cdots + a'_m\frac{\partial}{\partial a_m}\right)^r \phi(a_0 \cdots, a_m) \quad (20)$$

प्रश्नावली चौदह (A)

प्रश्न 1-4 सीधे बीजगणित से ही, और किसी व्यापक प्रमेय की सहायता के बिना ही हल किए जा सकते हैं। इन प्रश्नों में रूपांतरण

$$x=l_1X+m_1Y,\ \ y=l_2X+m_2Y,$$

लिया गया है और इसलिए $|M|$ $l_1m_2-l_2m_1$ के बराबर होगा; समघात $ax+by$, $ax^2+2bxy+cy^2$ क्रमश: $AX+BY$, $AX^2+2BXY+CY^2$ में रूपांतरित हो जाएँगे; अन्य समघातों के लिए भी यही बात लागू होगी।

1. सिद्ध कीजिए कि $ab'-a'b$, दो समघात $ax+by$, $a'x+b'y$ का एक निश्चर (संयुक्त निश्चर) है।

   उत्तर—$AB'-A'B=|M|\,(ab'-a'b)$.

2. सिद्ध कीजिए कि $ab'^2-2ba'b'+ca'^2$ दो समघात $ax^2+2bxy+cy^2$, $a'x+b'y$ का एक निश्चर है।

   उत्तर—$AB'^2-2\,BA'B'+CA'^2=|M|^2(ab'^2-2ba'b'+ca'^2)$.

3. सिद्ध कीजिए कि $ab'+a'b-2hh'$ दो द्विघाती समघात $ax^2+2hxy+by^2$, $a'x^2+2h'xy+b'y^2$ का एक निश्चर है।

   उत्तर—$AB'+A'B-2HH'=|M|^2\ (ab'+a'b-2hh')$.

4. सिद्ध कीजिए कि $b'(ax+by)-a'(bx+cy)$ दो समघात $ax^2+2bxy+cy^2$, $a'x+b'y$ का एक सहचर है।

   उत्तर—$B'(AX+BY)-A'(BX+CY)=|M|\{b'(ax+by)-a'(bx+cy)\}$

शेष प्रश्नों को केवल प्रतिस्थापन द्वारा ही सिद्ध कर देना अभीष्ट नहीं है।

5. प्रश्न 4 के परिणाम को, दो समघात $ax^2+2bxy+cy^2$, $a'x+b'y$ के जैकोबियन पर विचार करके सिद्ध कीजिए।

6. सिद्ध कीजिए कि $(ab'-a'b)x^2+(ac'-a'c)xy+(bc'-b'c)y^2$, दो समघात $ax^2+2bxy+cy^2$, $a'x^2+2b'xy+c'y^2$ का जैकोबियन है।

7. प्रश्न 1 के परिणाम को, समघात $ax+by$, $a'x+b'y$ के जैकोबियन पर विचार करके, सिद्ध कीजिए।

8. सिद्ध कीजिए कि $\Sigma(b_1c_2-b_2c_1)(ax+hy+gz)$, तीन समघात $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$, $a_1x+b_1y+c_1z$, $a_2x+b_2y+c_2z$, का जैकोबियन (और अतएव एक सहचर) है।

प्रश्न 9-12, §2.6 पर अभ्यास हैं।

9. यह दिखाने के बाद कि $ab-h^2$, $ax^2+2hxy+by^2$ का एक निश्चर है, प्रश्न 3 के परिणाम को, सिद्ध कीजिए ।

10. प्रश्न 2 के परिणाम को, $ax^2+2hxy+by^2$ और $(a'x+b'y)^2$ के संयुक्त निश्चर पर विचार करके सिद्ध कीजिए ।

11. सिद्ध कीजिए कि $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$, अर्थात् डिटर्मिनेंट

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix},$$

द्विघाती समघात $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$ का एक निश्चर है, और फिर इस समघात के तथा समघात $a'x^2+\ldots+2h'xy$ के दो संयुक्त निश्चरों को ज्ञात कीजिए ।

टिप्पणी—इन संयुक्त निश्चरों का वैश्लेषिक ज्यामिति में कुछ महत्व है । इनको प्रायः Θ, Θ' से प्रकट करते हैं जो इस प्रकार हैं—

$$\Theta = a'A+b'B+c'C+2f'F+2g'G+2h'H,$$
$$\Theta' = aA'+bB'+cC'+2fF'+2gG'+2hH',$$

जहाँ $A, A', \ldots$ आदि डिटर्मिनेन्ट Δ, Δ' में क्रमशः $a, a', \ldots$ आदि के सहखण्डों को प्रकट करते हैं । तुलना कीजिए—सॉमरविले—**अनेलिटिकल कोनिक्स**, अध्याय XX ।

12. द्विघाती समघात

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy \text{ और एकघाती}$$

समघात $lx+my+nz$ का एक निश्चर ज्ञात कीजिए और ज्यामिति में उस के महत्व को बतलाइए ।

सिद्ध कीजिए कि दूसरा संयुक्त निश्चर, प्रश्न 11 के Θ' द्वारा जिसको प्रकट किया गया है; अभिन्न रूप से शून्य हो जाता है ।

13. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} l^2 & lm & m^2 \\ 2ll' & lm'+l'm & 2mm' \\ l'^2 & l'm' & m'^2 \end{vmatrix} = (lm'-l'm)^3.$$

14. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} & \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} & \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y} \\ \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} & \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} & \dfrac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} \\ \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} & \dfrac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} & \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4} \end{vmatrix}$$

एक ऐसे समघात u का एक सहचर है, जिसका घात 4 से अधिक है और एक ऐसे समघात u का एक निश्चर है जिसका घात 4 है।

संकेत—प्रश्न 13 के डिटर्मिनेंट से गुणा करने के बाद जो डिटर्मिनेंट प्राप्त होता है उसकी पहली पंक्ति इस प्रकार है—

$$\frac{\partial^4 u}{\partial X^2 \partial x^2} \quad \frac{\partial^4 u}{\partial X \partial Y \partial x^2} \quad \frac{\partial^4 u}{\partial Y^2 \partial x^2}$$

[जहाँ $x = lX + mY,\ y = l'X + m'Y$]

§2.2 से तुलना कीजिए : यहाँ $\left(l\frac{\partial}{\partial x} + l'\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial X^2}$, इत्यादि, इत्यादि।

ऊपर प्राप्त किए हुए डिटर्मिनेंट को, प्रश्न 13 के डिटर्मिनेंट से गुणा करने से जो डिटर्मिनेंट आएगा उसकी पहली पंक्ति यों है—

$$\frac{\partial^4 u}{\partial X^4} \quad \frac{\partial^4 u}{\partial X^3 \partial Y} \quad \frac{\partial^4 u}{\partial X^2 \partial Y^2}$$

अतएव $x = MX$ होने पर पहले के डिटर्मिनेंट में $|M|^6$ से गुणा हो जाता है।

15. सिद्ध कीजिए कि $ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3$, अर्थात्

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}$$

$(a,b,c,d,e)\ (x,y)^4$ का एक निश्चर है।

16. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{yy} \\ v_{xx} & v_{xy} & v_{yy} \\ w_{xx} & w_{xy} & w_{yy} \end{vmatrix}$$

समघात u,v,w का एक सहचर है।

संकेत—गुणा करने वाला खंड $|M|^3$ है।

3. निश्चरों के गुणधर्म

3.1. निश्चर, गुणांकों में समघात होते हैं।

मान लीजिए, $I(a_0, \ldots, a_m)$

$u \equiv (a_0, \ldots, a_m)\ (x_1, \ldots x_n)^k$

का एक निश्चर है । यह भी मान लीजिए कि रूपांतरण $x=MX$, u को $(A_0,\ldots,A_m)$ $(X_1,\ldots,X_n)^k$ में बदल देता है । तो, M चाहे कुछ भी हो,

$$I(A_0,\ldots,A_m)=|M|^s I(a_0,\ldots,a_m), \qquad (1)$$

घातांक s, M से स्वतंत्र है ।

रूपांतरण

$$x_1=\lambda X_1,\ x_2=\lambda X_2,\ldots,\ x_n=\lambda X_n,$$

पर विचार कीजिए जहाँ $|M|=\lambda^n$ है ।

चूँकि u समघाती है और $x_1,\ldots, x_n$ में k घात का है तो इस विशेष रूपान्तरण के लिए, $A_0,\ldots, A_m$ के मान इस प्रकार हैं—

$$a_0\lambda^k,\ \ldots,\ a_m\lambda^k.$$

अतएव (1) इस प्रकार बदल जाता है—

$$I(a_0\lambda^k,\ldots,a_m\lambda^k)=\lambda^{ns}\, I(a_0,\ \ldots\ ,a_m). \qquad (2)$$

दूसरे शब्दों में, I, अपने स्वतंत्र चरों (arguments) $a_0,\ldots,a_m$ का एक समघात फलन है† और यदि उसका घात q है तो $_{su}\gamma={}_{by}\gamma$ होगा और इस परिणाम से यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि k, q, और n के पदों में s को $s=kq/n$ से प्रकट कर सकते हैं ।

3.2. भार (weight) : द्विचर समघात होने पर

द्विचर समघात

$$a_0x^k+ka_1x^{k-1}y+\ldots+a_ky^k$$

में प्रत्येक गुणांक के अनुबंध को उसका भार कहते हैं और गुणांकों के किसी गुणनफल का भार वही होता है जो उसके खंडों के भारों का योग होता है । इस प्रकार $a_0^\lambda a_1^\mu a_2\ldots$ का भार $\mu+2\nu+\ldots$ है ।

गुणांकों में किसी बहुपद समघात को समभारित (ISOBARIC) कहा जाता है जब प्रत्येक पद का वही भार हो । इस प्रकार, $a_0a_2-a_1^2$ समभारित है: क्योंकि a_0a_2 का भार $0+2$ है और a_1^2 का भार 2×1 है; हम पूरे व्यंजक $a_0a_2-a_1^2$ को ही भार 2 वाला कहते हैं, इस कथन में यह अर्थ निहित समझना चाहिए कि प्रत्येक पद ही उस भार का है ।

---

†यह एक सुपरिचित परिणाम है । यदि पाठक इस परिणाम से परिचित नहीं है तो एक उपपत्ति इस प्रकार प्राप्त की जा सकती है कि पहले यह मान लें कि I वास्तव में $I_1,I_2,\ldots$ का एक योग है जिनमें से प्रत्येक समघाती है और $q_1,q_2,\ldots$ घात का है और फिर यह दिखाया जा सकता है कि यह मान्यता, (2) की विरोधी हो जाती है ।

3.3. द्विचर समघातों के निश्चर सममारित होते हैं।

मान लीजिए, $I(a_0, \ldots a_k)$

$$= \sum_{r=0}^{k} \frac{k!}{r!\,(k-r)!} a_r x^{k-r} y^r \qquad (3)$$

का एक निश्चर है और I, $a_0, \ldots a_k$ में q घात का एक बहुपद है। मान लीजिए रूपान्तरण $x = MX$ u को

$$\sum_{r=0}^{k} \frac{k!}{r!\,(k-r)!} A_r X^{k-r} Y^r. \qquad (4)$$

में बदल देता है। तो §3.1 से (क्योंकि इस समय यहाँ 2 चर हैं, जिससे $n=2$),

$$I(A_0, \ldots, A_k) = |M|^{\frac{1}{2}kq} I(a_0, \ldots, a_k) \qquad (5)$$

चाहे मैट्रिक्स M कुछ भी हो,

रूपांतरण

$$x = X, \; y = \lambda Y,$$

को देखिए जिसके लिए $|M| = \lambda$ है। इस विशेष रूपांतरण के लिए $A_0, \ldots, A_k$ के मान यों हैं

$$a_0, \; a_1\lambda, \; \ldots, \; a_r\lambda^r, \; \ldots, \; a_k\lambda^k$$

अर्थात् **प्रत्येक गुणांक A के सहचारी λ का घात, गुणांक के भार के बराबर होता है।**

इस प्रकार, इस विशेष रूपांतरण के लिए, (5) का दायाँ पक्ष λ में इस प्रकार का एक बहुपद है कि किसी घात λ^w का गुणांक भार w के a-ओं का एक फलन है। लेकिन (5) का दायाँ पक्ष केवल यों हो जाता है—

$$\lambda^{1/2kq} I(a_0, \ldots, a_k), \qquad (6)$$

चूँकि इस विशेष रूपांतरण के लिए $|M| = \lambda$ है। अतएव λ का अकेला वह घात जो (5) के बाएँ पक्ष में आ सकता है, $\lambda^{1/2kq}$ है और इसका गुणांक $\frac{1}{2}kq$ भार वाले a-ओं का एक फलन होना चाहिए। इसके अतिरिक्त, चूँकि (5) के दाएँ और बाएँ दोनों पक्ष अभिन्न हैं, (5) की बाईं तरफ $\lambda^{1/2kq}$ का यह गुणांक $I(a_0, \ldots, a_k)$ होना चाहिए।

अतएव $I(a_0, \ldots, a_k)$ का भार $\frac{1}{2}kq$ है।

3.4. यह ध्यान देने की बात है कि a-ओं में किसी बहुपद का भार कोई पूर्णांक ही हो सकता है, और इसलिए जब $I(a_0, \ldots, a_k)$ किसी द्विचर समघात का

कोई बहुपद निश्चर हो तो,

$$I(A_0,\ldots,A_k)=|M|^s \quad I(a_0,\ldots,a_k), \qquad (7)$$

$$s=\tfrac{1}{2}kq$$

और $\frac{1}{2}kq$= किसी बहुपद का भार=कोई पूर्णांक ।

अतएव, (7) का s भी कोई पूर्णांक ही होगा ।

3.5. भार : यदि समघात दो से अधिक चरों में हों ।

समघात (§1.3)

$$\Sigma a_{\alpha,\beta\ldots,\lambda}\frac{k!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}\,x^{\alpha}\;x_2^{\beta}\ldots u_n^{\lambda} \qquad (8)$$

में अनुबंध λ (जो पद में x_n के घात का संगत है) को गुणांक $a,\alpha,\beta\ldots,\lambda$ का भार कहते हैं और गुणांकों के किसी गुणनफल का भार वही होता है जो उसके रचक खंडों के भार का योग होता है ।

मान लीजिए I(a), (8) का a-ओं में घात का एक बहुपद निश्चर है। मान लीजिए, रूपांतरण X=MX (8) को,

$$\Sigma A_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}\frac{k!}{\alpha!\;\beta!\;\ldots\;\lambda!}X_1^{\alpha}X_2^{\beta}\ldots X_n^{\lambda} \qquad (9)$$

में बदल देता है तो §3.1 से

$$I(A)=|M|^{kq/n}I(a) \qquad (10)$$

चाहे मैट्रिक्स M कुछ भी हो ।

रूपांतरण

$$x_1=X_1,\ldots,\;x_{n-1}=X_{n-1},\;x_n=\lambda X_n$$

को देखिए जिसमें $|M|=\lambda$ है । तो, §3.3 के तर्कों से यह सिद्ध किया जा सकता है कि I(a) अवश्य ही समभारित होगा और उसका भार kq/n होगा, इसके अतिरिक्त, चूंकि भार के लिए पूर्णांक होना आवश्यक है, kq/n एक पूर्णांक होगा ।

प्रश्नावली चौदह (B)

प्रश्न 2-4 निश्चरों के उन परिणामों के सहचरों में विस्तारमात्र है जिनको सिद्ध किया जा चुका है। उन्हीं की उपपत्ति को केवल कुछ परिवर्तन के साथ रखना आवश्यक होगा ।

1. यदि C(a,x) एक दिए हुए समघात u का कोई सहचर है और यदि C(a,x) विभिन्न घातों के बीजीय समघातों का कोई योग है जैसे—

$$C(a,x)=C_1(a,x^{\bar{\omega}})_1+\ldots+C_r(a,x)^{\bar{\omega}^r}$$

जहां घातांक $\tilde{\omega}$ चरों में घात को प्रकट करता है तो प्रत्येक अलग पद $C(a,x)_{\tilde{\omega}}$ स्वयं भी एक सहचर होगा ।

संकेत—चूंकि $C(a,x)$ एक सहचर है,

$$C(A,X) = |M|^{s}\, C(a,x)$$

$x_1,\ldots x_n$ के लिए $x_1t,\ldots,x_n^t$ और फलस्वरूप $X_1,\ldots X_n$ के लिए $X_1t,\ldots X_n^t$ रखिए ।

परिणामस्वरूप, $\Sigma_r\, C_r(A,X)^{\tilde{\omega}_r} t^{\tilde{\omega}_r} = |M|^s\ \ \Sigma_r\, C_r(a,x)_{\tilde{\omega}_r} t^{\tilde{\omega}_r}$

प्रत्येक पक्ष t में एक बहुपद है और t के समान घातों के गुणांकों को समीकृत किया जा सकता है ।

2. चरों में घात $\tilde{\omega}$ का कोई चर, गुणांकों में समघाती होता है ।

संकेत—विशेष रूपान्तरण

$$x_1 = \lambda X_1, \ldots,\ x_n = \lambda X_n$$

से, §3.1 की तरह, $C(a\overset{k}{\lambda},X)_{\tilde{\omega}} = \lambda^{ns} C(a,x)_{\tilde{\omega}}$,

अर्थात्

$$\lambda^{-\tilde{\omega}} C(a\lambda^k,x)^{\tilde{\omega}} = \lambda^{ns}\, C(a,x)^{\tilde{\omega}}$$

इससे वांछित परिणाम सिद्ध हो जाता है और साथ में यह भी ज्ञात हो जाता है कि यदि C, गुणांकों a में q घात का है तो—

$$\lambda^{kq} = \lambda^{ns}\lambda^{\tilde{\omega}}$$

या

$$kq = ns + \tilde{\omega}$$

3. यदि x,y में किसी द्विचर समघात के एक सहचर में हम x को एक भार का और y को शून्य भार का मानें (x^2 को 2 भार का इत्यादि), तो गुणांकों a में q घात का कोई सहचर $C(a,x)^{\tilde{\omega}}$ समभारित होगा और उसका भार $\frac{1}{2}(kq+\tilde{\omega})$ होगा ।

संकेत—विशेष रूपान्तरण $x=X$, $y=\lambda Y$ पर विचार करके §3.3 के तर्कों का अनुसरण कीजिए ।

4. यदि $x_1,\ldots,x_n$ में एक समघाती के किसी सहचर में हम $x_1,\ldots x_{n-1}$ को एक भार का और x_n को शून्य भार का ($x_1x_2x_n$ को 2 भारका, इत्यादि) मान लें तो गुणांकों a में q घात का कोई सहचर $C(a,x)^{\tilde{\omega}}$ समभारित होगा और उसका भार $\{kq+(n-1)\tilde{\omega}\}/n$ होगा ।

संकेत—§3.5 से तुलना कीजिए ।

3.6. किसी सहचर के निश्चर

मान लीजिए $u(a,x)_n^k$ n चर $x_1,\ldots,x_n$ में k घात का कोई दिया हुआ समघात है, । मान लीजिए $C(a,x)^{\omega}$, u का कोई ऐसा सहचर है जो चरों में ω घात का है और गुणांकों a में q घात का है । $C(a,x)^{\omega}$ में जो गुणांक हैं वे वास्तव में u के a न हो कर उनके समघाती फलन हैं । .

रूपांतरण $X=MX$, $u(a, x)$ को $u(A, X)$ में बदल देता है और, चूंकि C एक सहचर है, एक s इस प्रकार का होगा कि

$$C(A,X)^{\omega}=|M|^{s}\quad C(a,x)^{\omega}$$

इस प्रकार रूपांतरण $C(a,x)^{\omega}$ को $|M|^{-s}C(A,X)^{\omega}$ में बदल देता है । लेकिन C. a-ओं में, और A-ओं में, q घात का एक समघाती फलन है । अतएव $C(a,x)^{\omega}=|M|^{-s}C(A,X)^{\omega}\text{-}C(A|M|^{-s\,q},X)^{\omega}$. (11)

अब कल्पना कीजिए कि $I(b)$, $v(b,x)$ का कोई निश्चर है जो n चरों मे ω घात का एक समघात है । दूसरे शब्दों में, v को X के पदों में व्यक्त करने पर यदि गुणांकों को B से प्रकट किया जाए तो एक t इस प्रकार का होगा जिसके लिए—

$$I(B)=|M|^{t}I(b) \tag{12}$$

$v(b,x)$ को सहचर $C(a,x)^{\omega}$ मानिए; तो (11) से ज्ञात होता है कि संगत B वही हैं जो $C(A|M|^{-s/q},X)$ में पदों के गुणांक हैं ।

यदि $I(b)$, b में r घात का है, तो जब इसको a के पदों में व्यक्त किया जाएगा तो यह $I_1(a)$, होगा, जो एक ऐसा फलन है जो समघाती है और गुणांकों a में rq घात का है । इसके साथ-साथ, (12) से

$$I_1(A|M|^{-s/q})=|M|^{t}I_1(a),$$

या, यह ध्यान में रखते हुए कि I_1 समघाती है और a में rq घात का है,

$$|M|^{-rs}I_1(A)=|M|^{t}I_1(a)$$

अर्थात्, $I_1(a)$, मूल समघात $u(a,x)$ का एक निश्चर है ।

अब तक किए गए कार्य की व्यापकता को समझना आसान नहीं है । पाठक को एक विशेष उदाहरण के संबंध में उनका अध्ययन करना चाहिए जिसे अभी हम देंगे; यह §2.5 से लिया गया है—

$$u(a,x)^3\equiv a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3$$

का एक सहचर यह है—

$$C(a,x)^2\equiv(a_0a_2-a_1^2)x^2+(a_0a_3-a_1a_2)xy+(a_1a_3-a_2^2)y^2$$

u का हेसियन होने के कारण इस सहचर को गुणा करने वाला एक खंड $|M|^2$ होगा : अर्थात्

$$(A_0A_2-A_1^2)X^2+\ldots=|M|^2\{(a_0a_2-a_1^2)x^2+\ldots\},$$

या $$(a_0a_2-a_1^2)x^2+\ldots=\left\{\frac{A_0}{|M|}\ \frac{A_2}{|M|}-\left(\frac{A_1}{|M|}\right)^2\right\}X^2+\ldots, \quad (11a)$$

जो ऊपर (11) का संगत है।

लेकिन यदि $x=MX$ द्विघाती समघात

$$b_0x^2+2b_1xy+b_2y^2,$$

को $$B_0X^2+2B_1XY+B_2Y^2,$$

में बदल देता है तो

$$B_0B_2-B_1^2=|M|^2(b_0b_2-b_1^2) \quad (12a)$$

b-ओं के लिए (11a) के गुणांकों को लेने पर हम देखते हैं कि—

$$|M|^{-4}\{(A_0A_2-A_1^2)(A_1A_3-A_2^2)-\tfrac{1}{4}(A_0A_3-A_1A_2)^2\}$$
$$=|M|^2\{(a_0a_2-a_1^2)(a_1a_3-a_2^2)-\tfrac{1}{4}(a_0a_3-a_1a_2)^2\},$$

जो यह सिद्ध कर देता है कि §2.5 का (9) त्रिघात $a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3$ का एक निश्चर है।

3.7. **किसी सहचर के सहचर**—§3.6 के तर्क का ही थोड़ा-सा विस्तार करके और §3.6 के $I(b)$ के स्थान पर, n चरों में ω घात के किसी समघात के एक सहचर $C(b,x)\omega$ के उपयोग से यह देखा जा सकता है कि $C(b,x)\omega^1$ से मूलसमघात $u(a,x)$ का ही एक सहचर आ जाता है।

3.8. **अखंडनीय** (irreducible) **निश्चर और सहचर**—यदि $I(a)$, किसी समघात $u(a,x)_n^k$ का एक निश्चर है तो निश्चर की परिभाषा से यह स्पष्ट है कि, $I(a)$ के वर्ग, घन, ...आदि भी u के निश्चर होंगे। इस प्रकार निश्चरों की संख्या की कोई सीमा नहीं होती; सहचरों के लिए भी यही बात है।

दूसरी तरफ, किसी समघात u के लिए, ऐसे निश्चरों की संख्या सीमित होती है जिनको उसी या कम घात के निश्चरों के पदों में परिमेय और पूर्णांक के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता। इसी प्रकार, ऐसे सहचरों की संख्या भी सीमित होगी जिनको u के गुणांकों में उसी या कम घात के निश्चर और सहचरों के पदों में परिमेय और पूर्णांक रूप में व्यक्त न किया जा सके। वे निश्चर या सहचर जिनको इस प्रकार व्यक्त नहीं किया जा सकता, अखंडनीय कहलाते हैं। तब प्रमेय को इस प्रकार कह सकते हैं—

'किसी दिए हुए समघात के अखंडनीय सहचर और निश्चरों की संख्या सीमित होती है।'

इस प्रमेय को और समघातों के किसी दिए हुए निकाय (system) में संयुक्त सहचरों और निश्चरों में इसके विस्तार को कभी-कभी गॉर्डन-हिलबर्ट (Gordan-Hilbert) प्रमेय कहते हैं। इसकी उपपत्ति हमारी पुस्तक की सीमा से बाहर है।

अखंडनीय सहचर और निश्चरों में भी ऐसे बीजीय संबंध हो सकते हैं कि उसके पदों में से कोई भी शेष के किसी परिमेय और पूर्णांक फलन के रूप में व्यक्त न किया जा सके। उदाहरण के लिए, एक त्रिघात u के तीन अखंडनीय सहचर होते हैं, वह स्वयं, एक सहचर G, और एक सहचर H; इसका एक अखंडनीय निश्चर $\triangle$ होता है; इन चार को संबद्ध करने वाला एक संबंध

$$\triangle u^2 = G^2 + 4H^3$$

होता है जिसको हम §4.3 में सिद्ध करेंगे।

4. विहित समघात

4.1. द्विचर त्रिघात—पाठक उस युक्ति से परिचित होंगे जिसके द्वारा हम $ax^2+2hxy+by^2$ को समघात $aX^2+b_1Y^2$ के रूप में ला सकते हैं। इसको इस प्रकार प्राप्त किया जा सकता है—

$$ax^2+2hxy+by^2 = a\left(x+\frac{h}{a}\ y\right)^2 + \left(b-\frac{h^2}{a}\right)y^2$$

और फिर इसमें प्रतिस्थापन $X=x+(h/a)y$, $Y=y$ का उपयोग करके। व्यापक द्विघाती समघात पर बारहवें अध्याय के प्रमेय 47 में विचार किया गया था।

अब यह दिखाया जाएगा कि त्रिघात

$$a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3 \qquad (1)$$

को सामान्यतया, pX^3+qY^3 रूप में लिखा जा सकता है; इसके अपवाद वे त्रिघात होते हैं जिनमें कोई वर्ग खंड आता है।

इसको सिद्ध करने की कई रीतियाँ हैं: जो रीति हम अभी देंगे वह शायद सबसे सीधी है। हम इस समस्या से आरंभ करते हैं—

'क्या p, q, α, β के ऐसे मान संभव है कि (1),

$$p(x+\alpha y)^3+q(x+\beta y)^3 \qquad (2)$$

का सर्व सम (identically equal) हो सके?'

यह संभव होगा यदि α और β चुन लेने के बाद हम p और q ऐसे चुन सकें जो इन चार समीकरणों को संतुष्ट करें—

$$\left.\begin{aligned} p+q&=a_0, & p\alpha+q\beta&=a_1,\\ p\alpha^2+q\beta^2&=a_2, & p\alpha^3+q\beta^3&=a_3.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

यदि $\alpha=\beta$ हो तो a_0, a_1, a_2, a_3 के व्यापक मानों के लिए ये चार समीकरण अविरोधी नहीं हो सकते। हम पहले यह मानकर चलेंगे कि $\alpha \neq \beta$.

(3) का तीसरा समीकरण पहले दो से ही प्राप्त किया जा सकता है यदि हम P,Q इस प्रकार के चुन सकें कि--

$$a_2+Pa_1+Qa_0=0,\ \alpha^2+P\alpha+Q=0,\ \beta^2+P\beta+Q=0$$

सब एक साथ सत्य हो सकें। (3) का चौथा समीकरण दूसरे और तीसरे से प्राप्त हो सकता है यदि P, Q इनको भी संतुष्ट करें–

$$a_3+Pa_2+Qa_1=0,\ \alpha(\alpha^2+P\alpha+Q)=0,\ \beta(\beta^2+P\beta+Q)=0,$$

दूसरे शब्दों में, तीसरे और चौथे समीकरण पहले दो के परिणामस्वरूप ही प्राप्त हो सकते हैं यदि α, β

$$t^2+Pt+Q=0$$

के मूल हों जहाँ P, Q इन दो समीकरणों द्वारा ज्ञात किए गए हों--

$$a_2+Pa_1+Qa_0=0,$$
$$a_3+Pa_2+Qa_1=0.$$

इसका मतलब यह हुआ कि α, β

$$(a_0a_2-a_1^2)t^2+(a_1a_2-a_0a_3)t+(a_1a_3-a_2^2)=0$$

के मूल हैं और यदि वे विभिन्न हैं तो p,q जो (3) के पहले दो समीकरणों द्वारा ही प्राप्त किया जा सकता है।

इस प्रकार (1) जो समघात (2) के रूप में ही व्यक्त किया जा सकता है बशर्ते

$$(a_1a_2-a_0a_3)^2-4(a_0a_2-a_1^2)(a_1a_3-a_2^2) \qquad (4)$$

शून्य न हो। यह प्रतिबन्ध इसलिए आवश्यक है कि तब α और बराबर नहीं होंगे।

यह सरलता से देखा जा सकता है कि (4) के शून्य न होने वाले प्रतिबन्ध से कौन-कौन से त्रिघात छूट जाते हैं। यदि (4) शून्य है, तो दो द्विघात

$$a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2,$$
$$a_1x^2+2a_2xy+a_3y^2$$

में एक उभयनिष्ठ एकघाती खंड होगा; † अतएव

---

†पाठक इस तर्क को इस रूप में आसानी से पहचान जाएगा—

$$a_0x^2+2a_1x+a_2=0, \qquad a_1x^2+2a_2x+a_3=0$$

का एक उभयनिष्ठ मूल है; अतएव

$$a_0x^2+2a_1x+a_2=0, \qquad a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0,$$

का एक उभयनिष्ठ मूल होगा, और इसलिए दूसरे का एक मूल पुनरावृत्त (repeated) होगा। $F(x)=0$ और $F'(x)=0$ का प्रत्येक उभयनिष्ठ मूल पहले का एक पुनरावृत्त मूल होगा।

$$a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2,\ a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3$$

में एक उभयनिष्ठ एकघाती खंड होगा, और इसलिए दूसरे का एक पुनरावृत्त एकघाती खंड होगा। ऐसे किसी त्रिघात को X^2Y लिख सकते हैं, जहाँ X और Y, x और y में एकघाती है।

4.2. द्विचर चतुर्घात (Binary quartics)

चतुर्घात

$$(a_0,\cdots,a_4)\ (x,y)^4 \tag{5}$$

के चार एकघाती खंड हैं। इनके युग्म बनाकर हम (5) को दो द्विघाती खंडों के गुणनफल की तरह लिख सकते हैं, मान लीजिए वे इस प्रकार हैं—

$$a'_0x^2+2h'xy+b'y^2,\quad a''x^2+2h''xy+b''y^2 \tag{6}$$

पहले हम उन चतुर्घातों को अलग कर देते हैं जिनमें कोई खंड वर्ग है और जो स्वयं x और y में एकघाती हैं। तो एक एकघाती जिसका रूपान्तरण द्वारा वास्तविक होना आवश्यक नहीं है, हम (6) के खंडों को इस प्रकार लिख सकते हैं।†

$$X^2+Y^2,\qquad \alpha X^2+2\beta XY+\gamma Y^2$$

प्रमेय 48 को लागू करके, और इस बात पर बिना जोर दिए कि रूपान्तरण वास्तविक है, हम इनको इस प्रकार लिख सकते हैं—

$$X_1^2+X_2^2,\quad \lambda_1X_1^2+\lambda_2X_2^2, \tag{7}$$

इसके अतिरिक्त, क्योंकि हमने उन चतुर्घातों को अलग कर दिया था जिनमें कोई खंड वर्ग और एकघाती है, इसलिए न तो λ_1 और न λ_2 शून्य होगा और चतुर्घात को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\lambda_1X_1^4+(\lambda_1+\lambda_2)X_1^2X_2^2+\lambda_2X_2^4$$

और एक अन्तिम प्रतिस्थापन

$$X=\lambda^{1/4}{}_1\,X_1,\quad Y=\lambda^{1/4}{}_2\,X_2$$

के बाद चतुर्घात को यों लिख सकते हैं—

$$X^4+6mX^2Y^2+Y^4 \tag{8}$$

---

†हमें केवल $a'x^2+2h'xy+b'y^2$ के दो विभिन्न खंडों को $X+iY$ और $X-iY$ की तरह का रखना है।

यह व्यापक चतुर्घात के लिए विहित समघात है। एक ऐसा चतुर्घात जिसमें कोई वर्ग-खण्ड हो और जिस पर हमने अब तक विचार नहीं किया था, इस प्रकार लिखा जा सकता है—$X^2(\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2)$

4.3. विहित समघातों के अनुप्रयोग—विहित समघात को यदि ध्यान में रखा जाए तो किसी समघात के निश्चरों और सहचरों के संबंधों का आसानी से पता लगाया जा सकता है। उदाहरण के लिए, त्रिघात

$$u=a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_0y^2$$

का (§2.5)

एक सहचर $H=(a_0a_2-a_1^2)x^2+\ldots$ है; [§2.5 का (8)].

एक सहचर $G=(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3)x^3+\ldots$ है; [§ 2.5 का (10)]

और एक निश्चर $\Delta=(a_0a_3-a_1a_2)^2-4(a_0a_2-a_1^2)(a_1a_3-a_2^2)$ है।

जब तक $\Delta=0$ नहीं होता त्रिघात को, §4.1 के रूपांतरण $X=x+\alpha y$, $Y=x+\beta y$ द्वारा $u=pX^3+qY^3$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इन चरों में सहचर H और G यह हो जाते हैं—

$$H_1=pqXY,\quad G_1=p^2qX^3-pq^2Y^3,$$

जबकि, $\Delta_1=p^2q^2$.

यह स्पष्ट हो जाता है कि $\Delta_1u^2=G_1^2+4H_1^3$

अब चूंकि $|M|$ रूपान्तरण $\mathbf{x}=\mathbf{MX}$ का मापांक है,

$$H_1=|M|^2H,\quad G_1=|M|^3G,\quad \Delta_1=|M|^6\Delta.$$

H का खंड $|M|^2$ है क्योंकि H एक हेसियन है। G का खंड $|M|^3$ बड़ी सरलता से पता लग जाता है यदि हम रूपान्तरण $x=\lambda X$, $y=\lambda Y$, पर विचार करें जिससे $A_0=a_0\lambda^3,\cdots,A_3=a_3\lambda^3$ आ जाता है,

फलस्वरूप

$$(A_0^2A_3-3A_0A_1A_2+2A_1^3)X^3+\cdots$$
$$=\lambda^9\{(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3)x^3\lambda^{-3}+\cdots\}$$
$$=\lambda^6\{(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3)x^3+\cdots\}$$

और गुणा करने वाला खंड λ^6, या $|M|^3$ है।

का खंड $|M|^6$, भी इसी प्रकार प्राप्त किया जा सकता है।

फलस्वरूप, यह सिद्ध हो जाता है कि जब तक $\Delta=0$ नहीं है तो,

$$\Delta u^2=G^2+4H^3 \qquad (9)$$

यदि $\Delta=0$ है तो त्रिघात को X^2Y के रूप में लिखा जा सकता है जो एक ऐसा समघात है जिसके लिए G और H दोनों शून्य हैं।

5. ज्यामितीय निश्चर

5·1. प्रक्षेपीय निश्चर (projective invariants)

मान लीजिए, एक बिंदु P को जिसके निर्देश एक समतल π में एक त्रिभुज ABC के निर्देश में समघाती निर्देशांक (homogeneous coordinates) x, y, z [स्पष्टता के लिए, मान लीजिए क्षेत्रीय (areal) या त्रिरेखीय (trilinear)] को एक दूसरे समतल π' में एक बिदु P' में प्रक्षेपित किया गया है। मान लीजिए, π' में ABC का प्रक्षेप $A'\ B'\ C'$ है और $A'\ B'\ C'$ के निर्देश में P' के समघात निर्देशांक x', y', z' हैं। तो, जैसा वैश्लेषिक ज्यामिति की अनेक पुस्तकें (एक या दूसरे रूप में) सिद्ध करती हैं, इस प्रकार के अचर l, m, n, होते हैं कि

$$x=lx', \quad y=my', \quad z=nz'.$$

मान लीजिए, π' में $A'\ B'\ C'$ के अलावा किसी और त्रिभुज के निर्देश में P' के समघात निर्देशांक X, Y, Z हैं। तो निम्नलिखित संबंध स्पष्ट हैं–

$$\begin{aligned} x'&=\lambda_1X+\mu_1Y+\nu_1Z, \\ y'&=\lambda_2X+\mu_2Y+\nu_2Z, \\ z'&=\lambda_3X+\mu_3Y+\nu_3Z. \end{aligned}$$

इस प्रकार π में किसी आकृति (Figure) का किसी दूसरे समतल π' में प्रक्षेप होने पर निम्नलिखित प्रकार का एक रूपांतरण होता है—

$$\left.\begin{aligned} x&=l_1X+m_1Y+n_1Z, \\ y&=l_2X+m_2Y+n_2Z, \\ z&=l_3X+m_3Y+n_3Z, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

जहाँ, डिटर्मिनेन्ट $(l_1m_2\ n_3)$ शून्य नहीं है। क्योंकि $x=0,\ y=0,\ z=0$ संगामी (concurrent) रेखाएँ नहीं हैं।

इस प्रकार प्रक्षेप से वैसा ही रूपान्तरण प्राप्त होता है जिस पर हमने अध्याय के पिछले परिच्छेदों में विचार किया था। आकृतियों के वे ज्यामितीय गुणधर्म जिनमें प्रक्षेप से कोई अन्तर नहीं पड़ता, (अर्थात् प्रक्षेपीय गुणधर्म) बीजीय समघातों के निश्चरों अथवा सहचरों के संगत हो सकते हैं, और विलोमतः, बीजीय समघातों के किसी निश्चर अथवा सहचर के लिए भी यह आशा की जा सकती है कि वह किसी ज्यामितीय आकृति के किसी प्रक्षेपीय गुणधर्म का संगत होगा।

द्विचर रूपान्तरण

$$x=l_1X+m_1Y \qquad\qquad Y=l_2X+m_2Y$$

को उस परिस्थिति में (1) का ही एक रूप कहा जा सकता है जब निर्देश के मूल त्रिभुज के शीर्ष C से जाने वाली रेखाएँ ही केवल विचाराधीन हों; क्योंकि $ax^2+2hxy+by^2=0$ की तरह का कोई समीकरण C से जाने वाली दो रेखाओं के एक युग्म का संगत होगा; (2) से रूपान्तरण के बाद, मान लीजिए, वह

$$AX^2+2HXY+BY^2=0,$$

हो जाता है जो प्रक्षेपित आकृति में निर्देश के त्रिभुज के किसी शीर्ष से जाने वाली रेखाओं का एक युग्म है।

ज्यामितीय दृष्टिकोण से निश्चर सिद्धांन्त के व्यवस्थित या रीतिबद्ध विकास का हम यहाँ प्रयत्न नहीं करेंगे : केवल कुछ पृथक-पृथक् उदाहरणों पर ही विचार किया जाएगा।

चार रेखाओं की एक कूचिका (pencil) के वज्रानुपात (cross-ratio) में प्रक्षेप से कोई अन्तर नहीं पड़ता : रेखाओं के दो युग्म

$$ax^2+2hxy+by^2, \quad a'x^2+2h'xy+b'y^2$$

एक हरात्मक (harmonic) कूचिका बना सकें इसके लिए प्रतिबंध यह है कि $ab'+a'b-2hh'=0$ हो। यह एक ऐसे गुणधर्म को प्रकट करता है जिसमें प्रक्षेप से कोई अन्तर नहीं पड़ता, और जैसी हमें आशा करनी चाहिए थी, $ab'+a'b-2hh'$, दोनों बीजीय समघातों का एक निश्चर है। इसी प्रकार, चार रेखाओं

$$ax^4+4bx^3+6cx^2y^2+4dxy^3+ey^4=0$$

के वज्रानुपात के लिए हम यह आशा कर सकते हैं कि वह चतुर्घात के कुछ निश्चरों को प्रकट करेगा। चार रेखाएँ एक हरात्मक कूचिका बनाएँ इसके लिए प्रतिवन्ध यह है कि —

$$J\equiv ace+2bcd-ad^2-b^2e-c^3=0$$

और, जैसा हमने (प्रश्नावली चौदह A प्रश्न 15 में) देखा है, J चतुर्घात का एक निश्चर है : चारों रेखाएँ एक समहरात्मक (equiharmonic) कूचिका बनाएँ, अर्थात्, छः वज्रानुपात

$$\rho,\ \frac{1}{\rho},\ 1-\rho\ ,\ \frac{1}{1-\rho}\ ,\ 1-\frac{1}{\rho}\ \ ,\ \frac{\rho}{\rho-1}$$

में से दो, अर्थात, $-\omega, -\omega^2, -\omega^2,\ -\omega, -\omega^2,\ -\omega,$

वज्रानुपातों में से पहले और चौथे हरात्मक कूचिका बनाएँ इसके लिए प्रतिवन्ध यह है कि—

$$I\equiv ae-4bd+3c^2=0$$

है। और I, चतुर्घात का एक निश्चर है।

इसके अतिरिक्त, ज्यामिति में, किसी दिए हुए वक्र का हेसियन एक ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ (locus) होता है वक्र के सापेक्ष जिसका ध्रुवी शांकव (polar conic) रेखाओं का एक युग्म हो : बिन्दुपथ वक्र को केवल नति-परिवर्तनों (inflexions) पर और वक्र के बहुल-बिन्दुओं (multiple points) पर मिलता है। और प्रक्षेप में मुख्य शांकवों से मुख्य शांकव, रेखा-युग्मों से रेखा-युग्म, नति-परिवर्तन के बिन्दुओं से नति-परिवर्तन के ही बिन्दु, तथा बहुल बिन्दुओं से बहुल बिन्दु ही प्राप्त होते हैं। इस प्रकार किसी हेसियन के समस्त ज्यामितीय लक्षणों में प्रक्षेप से कोई अन्तर नहीं आता और इन परिस्थितियों में, जैसी हमें आशा करनी चाहिए, हेसियन एक बीजीय समघात का एक सहचर सिद्ध हो जाता है। इसी प्रकार तीन वक्रों का जैकोबियन एक ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ होता है जिसकी तीनों वक्रों के सापेक्ष ध्रुवी-रेखाएँ (polar lines) संगामी हों; इस प्रकार इसकी ज्यामितीय परिभाषा वक्रों के प्रक्षेपीय गुणधर्मों पर आधारित हो जाती है, और जैसी हमको आशा करनी चाहिए थी, किन्हीं तीन बीजीय समघातों का जैकोबियन एक सहचर होता है।

अभी तक हमने जिन निश्चरों और सहचरों पर विचार किया है, प्रक्षेप ज्यामिति से अपने घनिष्ठ संबंध की दृष्टि से उनको कभी-कभी प्रक्षेपीय निश्चर और सहचर भी कहा जाता है।

5.2. **मापीय निश्चर** (Metrical invariants)

लांबिक रूपान्तरण
$$\left.\begin{aligned} x&=l_1X+m_1Y+n_1Z,\\ y&=l_2X+m_2Y+n_2Z,\\ z&=l_3X+m_3Y+n_3Z,\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

जहाँ (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), और (l_3, m_3, n_3) तीन परस्पर लम्ब रेखाओं की दिक् कोज्याएं हैं, एक विशेष प्रकार का एकघाती रूपान्तरण है। यह

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy, \qquad (4)$$

के गुणांकों के कुछ ऐसे फलनों को अपरिवर्तित रहने देता है जो व्यापक एकघाती रूपांतरण के अन्तर्गत निश्चर नहीं हो तो यदि (3) के द्वारा (4)

$$a_1X^2+b_1Y^2+c_1Z^2+2f_1YZ+2g_1ZX+2h_1XY, \qquad (5)$$

में रूपांतरित हो जाता है, और चूँकि (3) के द्वारा $x^2+y^2+z^2$ भी $X^2+Y^2+Z^2$ में रूपांतरित हो जाता है। हम देखते है कि λ के वे मान जिनके लिए $(4)-\lambda(x^2+y^2+z^2)$ एकघाती खंडों का एक युग्म है, λ के वही मान हैं जिनके लिए $(5)-\lambda(X^2+Y^2+Z^2)$ एकघाती खंडों का एक युग्म होगा। λ के ये मान क्रमशः निम्नलिखित से दिए जा सकते हैं

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & h & g \\ h & b-\lambda & f \\ g & f & c-\lambda \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} a_1-\lambda & h_1 & g_1 \\ h_1 & b_1-\lambda & f_1 \\ g_1 & f_1 & c_1-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

इन दो समीकरणों में λ के घातों के गुणांकों की तुलना करने पर हम देख कि—

$$a+b+c=a_1+b_1+c_1,$$
$$A+B+C=A_1+B_1+C_1 \quad (A\equiv bc-f^2, \text{ आदि}),$$
$$\Delta=\Delta_1$$

जहाँ Δ, समघात (4) का विवेचक है। दूसरे शब्दों में, $a+b+c$, $bc+ca+ab-f^2-g^2-h^2$ लांबिक रूपांतरण के अंतर्गत निश्चर हैं; व्यापक एकघाती रूपांतरण के अंतर्गत वे निश्चर नहीं है। जबकि, विवेचक Δ सभी एकघाती रूपांतरणों के लिए समघात का एक निश्चर है।

लांबिक रूपांतरण (3), निर्देश के समकोणीय अक्षों के एक समुच्चय से, समकोणीय अक्षों के एक दूसरे समुच्चय में परिवर्तन के तुल्य है। यह किसी ज्यामितीय आकृति के उन सभी गुणधर्मों को अपरिवर्तित छोड़ देता है जो पूर्णतः माप (measurement) पर आश्रित होते हैं। उदाहरण के लिए,

$$\frac{\lambda\lambda_1+\mu\mu_1+\upsilon\upsilon_1}{\sqrt{\{(\lambda_1^2+\mu_1^2+\upsilon_1^2)(\lambda^2+\mu^2+\upsilon^2)\}}} \qquad (6)$$

किसी भी लांबिक रूपांतरण के अंतर्गत एकघाती समघातों

$$\lambda x+\mu y+\upsilon z, \qquad \lambda_1 x+\mu_1 y+\upsilon_1 z$$

का एक निश्चर है : क्योंकि (6) दोनों समतलों के बीच के कोण का कोसाइन (cosine) है। बीजगणित की दृष्टि से ऐसे उदाहरण अधिक महत्त्व के नहीं हैं।

6. अंकगणितीय और अन्य निश्चर

6.1. बीजीय समघातों (या वक्रों) के सहचारी कुछ पूर्णांक ऐसे होते हैं जो चरों में रूपान्तरण $\mathbf{x}=M\mathbf{X}$ के बाद भी स्पष्टतया अपरिवर्तित रहते हैं। वक्र का घात, वक्र के उसके हेसियन से प्रतिच्छेदों (intersections) की संख्या, आदि इनके उदाहरण हैं। इनको अंकगणितीय निश्चर कहते हैं। एक ऐसा उदाहरण जो एकदम स्पष्ट† नहीं होता—कुछ बिन्दुओं के निर्देशांकों द्वारा बने मैट्रिक्स का क्रम है।

मान लीजिए, $\mathbf{x}$ के घटक $x, y, \ldots, z$ है जिनकी संख्या n है। मान लीजिए m बिन्दु (या $\mathbf{x}$ के विशेष मान) इस प्रकार दिए गए हैं—

$$(x_1, \ldots, z_1), \qquad \ldots, \qquad (x_m, \ldots, z_m).$$

---

†यह बात उसे भी स्पष्ट हो जाती है जिसे n-विम (n-dimensional) ज्यामिति का कुछ ज्ञान है।

तो मैट्रिक्स

$$\begin{bmatrix} x_1 & .. & z_1 \\ . & .. & . \\ x_m & .. & z_m \end{bmatrix}$$

का क्रम किसी भी व्युत्क्रमणीय एकघाती रूपांतरण $x=MX$ के पश्चात अपरिर्वातित रहता है ।

मान लीजिए मैट्रिक्स का क्रम $r(<m)$ है । तो (दे० प्रमेय 31) हम r पंक्तियाँ चुन कर शेष को इन r पंक्तियों के गुणजों के योगों के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। लिखने में सुविधा की दृष्टि से, मान लीजिए कि r-वीं पंक्ति के बाद की समस्त पंक्तियों को पहली r पंक्तियों के गुणजों के योगों के रूप में लिखा जा सकता है । तो, कुछ अचर $\lambda_{1k},..,\lambda_{rk}$ इस प्रकार के अवश्य होंगे कि $x,...,z$ के किसी भी अक्षर t के लिए—

$$t_{r+k}=\lambda_{1k}t_1+..+\lambda_{rk}t_r. \qquad (1)$$

होगा । रूपांतरण $x=MX$ का एक प्रतिलोम (inverse) $X=M^{-1}x$ होता है जो पूरे रूप में, मान लीजिए यों है—

$$X=c_{11}x+...+c_{1n}z,$$

$$. \quad . \quad . \quad .$$

$$Z=c_{n1}x+...+c_{nn}z.$$

विशेष विन्दुओं,

$$(X_1,...,Z_1), \; ..., \; (X_m,...,Z_m),$$

के लिए अनुबंध रखने पर और यह मानने पर कि t वास्तव में, $x, y,.., z$ का j-वाँ अक्षर है, हम देखते हैं कि

$$T_{r+k}-\sum_{q=1}^{r}\lambda_{qk}T_k$$

$$=(c_{j1}x_{r+k}+...+c_{jn}z_{r+k})-\sum_{q=1}^{r}\lambda_{qk}(c_{j1}x_q+..+c_{jn}z_q)$$

(1) से, $c_{j1},..,c_{jn}$ में से प्रत्येक का गुणांक शून्य है और अतएव (1) का आशय यह हुआ कि

$$T_{r+k}=\lambda_{1k}T_1+..+\lambda_{rk}T_r. \qquad (2)$$

इसके विपरीत पहले वाले $X=M^{-1}x$ के बदले $x=MX$ का उपयोग करने पर हम देखते हैं कि (2) में (1) का आशय निहित है। प्रमेय 31 और 32, से यह स्पष्ट हो जाता है कि दो मैट्रिक्स

$$\begin{bmatrix} x_1 & . & z_1 \\ . & . & . \\ x_m & . & z_m \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} X^1 & . & Z_1 \\ . & . & . \\ X_m & . & Z_m \end{bmatrix}$$

के क्रम बराबर हैं ।

6.2. पारदिष्ट (Transvectants)—अन्त में हम द्विचर समघातों पर उन निश्चरों के अनुप्रयोगों पर विचार करेंगे जो चरों के विशेष मानों से प्राप्त होते हैं ।

मान लीजिए $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ आदि चर (x, y) चरों के दो सहरूपांतरी युग्म हैं जिनमें से प्रत्येक में रूपांतरण

$$x=lX+mY, \quad Y=l'X+m'Y, \tag{3}$$

हो सकता है जहाँ $|M|=lm'-l'm$ तो,

$$\frac{\partial}{\partial X}=l\frac{\partial}{\partial x}+l'\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial Y}=m\frac{\partial}{\partial x}+m'\frac{\partial}{\partial y},$$

होगा जहाँ कि रूपांतरण (3) का प्रतिरूपांतरी है (दसवें अध्याय § 6.2 से तुलना कीजिए) ।

अब यदि संकारक (operators) $\frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial Y_1}, \frac{\partial}{\partial X_2}, \frac{\partial}{\partial Y_2}$ आदि X_1, Y_1, X_2, Y_2 के किसी फलन पर संक्रिया करें और उनको स्वतन्त्र चर माना जाए तो हम देखते हैं कि—

$$\frac{\partial}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial Y_2}-\frac{\partial}{\partial Y_1}\frac{\partial}{\partial X_2}=\left(l\frac{\partial}{\partial x_1}+l'\frac{\partial}{\partial y_1}\right)\left(m\frac{\partial}{\partial x_2}+m'\frac{\partial}{\partial y_2}\right)$$
$$-\left(m\frac{\partial}{\partial x_1}+m'\frac{\partial}{\partial y_1}\right)\left(l\frac{\partial}{\partial x_2}+l'\frac{\partial}{\partial y_2}\right)$$
$$=(lm'-l'm)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2}-\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right). \tag{4}$$

अतएव (4) एक निश्चर संकारक है ।

मान लीजिए जब हम $x=x_1, y=y_1$ रखते हैं, तो द्विचर समघात u, v क्रमशः u_1, v_1 हो जाते हैं; और जब हम $x=x_2, y=y_2$ रखें तो वही समघात u, v क्रमशः u_2, v_2 हो जाते हैं; U_1, V_1 और U_2, V_2 क्रमशः वे संगत समघात हैं जो u, v को X, Y के पदों में व्यक्त करके और विशेष मान X_1, Y_1 और X_2, Y_2 रखकर प्राप्त होते हैं । तो गुणनफल $U_1 V_2$ पर संक्रिया के बाद हम देखते हैं कि—

$$\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial Y_2}-\frac{\partial}{\partial Y_1}\frac{\partial}{\partial X_2}\right)(U_1V_2)$$
$$=|M|\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2}-\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)(u_1v_2),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial Y_2}-\frac{\partial}{\partial Y_1}\frac{\partial}{\partial X_2}\right)^2(U_1V_2)$$
$$=|M|^2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2}-\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2(u_1v_2),$$

इत्यादि-इत्यादि । दूसरे शब्दों में, किसी भी पूर्णांक r के लिए—

$$\frac{\partial^r U_1}{\partial X_1^r}\frac{\partial^r V_2}{\partial Y_2^r}-r\frac{\partial^r U_1}{\partial X_1^{r-1}\partial Y_1}\frac{\partial^r V_2}{\partial X_2\partial y_2^{r-1}}+\ldots$$
$$=|M|^r\left(\frac{\partial^r u_1}{\partial x_1^r}\frac{\partial^r v_2}{\partial y_2^r}-r\frac{\partial U_1}{\partial x_1^{r-1}\partial y_1}\frac{\partial^r v_2}{x_2\partial y_2^{r-1}}+\ldots\right)$$

ये परिणाम (x_1, y_1) और (x_2, y_2) आदि समस्त युग्मों के लिए सत्य हैं। ऐसा होने के कारण हम दोनों युग्मों के बदले (x, y) रख सकते हैं और इस प्रमेय पर पहुँचते हैं कि—

$$\frac{\partial^r u}{\partial x^r}\frac{\partial^r v}{\partial y^r}-r\frac{\partial^r u}{\partial x^{r-1}\partial y}\frac{\partial^r v}{\partial x\,\partial y^{r-1}}+\ldots \tag{5}$$

दोनों समघात u और v का एक सहचर (कदाचित् एक निश्चर) है। इसको u और v का r-वाँ पारदिष्ट कहते हैं।

अन्ततः, जब (5) में हम $v \equiv u$ लेते हैं तो हमें अकेले समघात u के सहचर प्राप्त होते हैं।

समघातों के किसी समुच्चय के निश्चरों और सहचरों के व्यवस्थित अध्ययन के लिए इस रीति को आधार बनाया जा सकता है।

7. अधिक अध्ययन के लिए

इस अध्याय में केवल उन प्रारम्भिक परिणामों की रूपरेखा पर ही विचार किया गया है जहाँ से निश्चरों और सहचरों के सिद्धांत का अध्ययन शुरू होता है। इस विषय में निम्नलिखित पुस्तकें अधिक प्रकाश डाल सकती हैं —

ई० बी० ईलियट, एन इन्ट्रोडक्शन टू दि एलजेब्रा आँफ क्वान्टिक्स (आक्सफोर्ड, 1895)

ग्रेस एण्ड यंग, दि एलजेब्रा आँफ इनवेरिएन्ट्स (कैम्ब्रिज, 1902),

विट्जेनबॉफ, इनवैरिएन्ट्न थ्योरी (ग्रानिगंन, 1923),

एच० डब्ल्यू० टर्नबुल, दि थ्योरी ऑफ डिटर्मिनेन्ट्स, मैट्रिक्स एन्ड इनवैरिएन्ट्स (ग्लासगो, 1928)

प्रश्नावली चौदह (C)

1. $a_0x^3+3a_1 x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3$ के गुणांकों के उस अधिकतम व्यापक फलन को लिखिए जो —

(i) समघाती और गुणांकों में 2 घात का, समभारित और 3 भार का है ;

(ii) समघाती और गुणांकों में 3 घात का, समभारित और 4 भार का है ।

संकेत—(i) तीन या तो 3 और 0 का योग है या 2 और 1 का; संभव पद केवल वही हैं जो a_0a_3 और a_1a_2 के संख्यात्मक गुणज हैं ।

उत्तर—$\alpha a_0a_3+\beta a_1a_2$, जहाँ α, β संख्यात्मक अचर हैं ।

2. चतुर्घात $(a, b, c, d, e)(x, y)^4$ के निश्चर $I\equiv ae-4bd+3c^2$ का भार ज्ञात कीजिए ।

संकेत—चतुर्घात को $(a_0,\ldots, a_4)(x, y)^4$ के रूप में लिख कर प्रारम्भ कीजिए ।

3. द्विघाती समघात

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1$$

के विवेचक $|a_{rs}|$ का भार ज्ञात कीजिए ।

संकेत—समघात को इस प्रकार लिखिए—

$$\Sigma \frac{2!}{\alpha!\beta!\gamma!} a_{\alpha,}\beta, \quad x_1^\alpha x\beta_2 \quad x_3^\alpha$$

लिखिए जिसमें योग इस प्रकार किया गया है कि $\alpha+\beta+\gamma=2$. इस प्रकार $a_{11}=a_{2,0,0}, a_{23}=a_{0,1,1}$.

4. $ax^2+2hxy+by^2$, $a'x^2+2h'xy+b'y^2$ का जैकोबियन लिखिए और उससे (दे० § 3.6) यह निगमन कीजिए कि

$$(ab'-a'b)^2+4(ah'-a'h)(bh'-b'h)$$

दोनों समघातों का एक संयुक्त-निश्चर है ।

5. इस प्रमेय की जाँच कीजिए कि

'जब I, समघात $(a_0,\cdots, a_n)(x,y)^n$ का एक निश्चर हो तो,

$$\left(a_0 \frac{\partial}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial}{\partial a_2}+\cdots+na_{n-1}\frac{\partial}{\partial a_n}\right)I=0,$$

$$\left(na_1\frac{\partial}{\partial a_0}+(n-1)a_2\frac{\partial}{\partial a_1}+\cdots+a_n\frac{\partial}{\partial a_{n-1}}\right)I=0\text{'},$$

जहां तक उसका संबंध (i) किसी द्विघाती समघात के विवेचक से है, (ii) किसी त्रिघात के निश्चर Δ (दे० § 4.3) से है, (iii) किसी चतुर्घात के निश्चरों I, J (दे० § 5.1) से है ।

6. सिद्ध कीजिए कि प्रतिस्थापन $X=px+qy$, $Y=p'x+q'y$ द्वारा, व्यापक त्रिघात $ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3$ का, विहित समघात AX^3+DY^3 में समानयन हो सकता है, जहाँ कि त्रिघात का हेसियन यों है—

$(ac-b^2)x^2+(ad-bc)xy+(bd-c^2)y^2\equiv(px+qy)\ (p'x+q'y)$.

संकेत— $AX^3+3BX^2Y+3CXY^2+DY^3$ के हेसियन का समानयन XY में हो जाता है : अर्थात् $AC=B^2$, $BD=C^2$. सिद्ध कीजिए कि, यदि $A\neq 0$ है, तो या तो $B=C=0$ है और या समघात एक घन (cube) है; यदि $A=0$ है तो $B=C=0$ और हेसियन सर्व-समरूप से शून्य हो जाता है।

7. दो रेखा-युग्मों

$$ax^2+2hxy+by^2=0,\ a'x^2+2h'xy+b'y^2=0$$

द्वारा निर्धारित अंतर्वलन की द्विक रेखाओं (double line) का समीकरण ज्ञात कीजिए और यह सिद्ध कीजिए कि वह इन दोनों समघातों के एक सहचर का संगत होता है।

संकेत—यदि रेखा-युग्म $a_1x^2+2h_1xy+b_1y^2=0$ है, तो, स्वसंयुग्मियों (harmonic conjugates) के लिए सामान्य प्रतिबन्ध के कारण,

$$ab_1+a_1b-2hh_1=0,\quad a'b_1+a_1b'-2h'h_1=0.$$

8. यदि दो शांकव (conics) S, S' इस प्रकार के हों कि एक त्रिभुज S' के अन्तर्गत (inscribed) और S के परिगत (circumscribed) बनाया जा सके, तो निश्चर Δ, Θ, Θ', Δ' [दे० प्रश्नावली चौदह (A), प्रश्न 11] संबंध $\Theta^2=4\,\Delta\Theta'$ को संतुष्ट करेंगे, चाहे निर्देश त्रिभुज कुछ भी हो।

संकेत—शांकवों के समीकरणों पर इस रूप में विचार कीजिए—

$$\Sigma\equiv 2Fmn+2Gml+2Hlm=0,$$

$$S'\equiv 2f'yz+2g'zx+2h'xy=0.$$

व्यापक परिणाम एकघाती रूपान्तरण द्वारा प्राप्त हो जाता है।

9. सिद्ध कीजिए कि n चरों में m एकघाती समघात $a_{r1}x_1+\cdots+a_{rn}x_n$ $(r=1,\ldots,m)$ के गुणाकों a_{rs} के मैट्रिक्स का क्रम एक अंकगणितीय निश्चर होता है।

10. सिद्ध कीजिए कि यदि $(x_r,\ y_r,\ z_r)$ को $x=MX$ द्वारा $(X_r,\ Y_r,\ Z_r)$ में रूपांतरित किया जाए तो डिटर्मिनेन्ट $|\ x_1\ y_2\ z_3\ |$ एक निश्चर होता है।

11. सिद्ध कीजिए कि दो समघात

$$(a_o, \cdots, a_n)(x, y)^n, \quad (b_o, \cdots, b_n)(x, y)^n$$

का n-वाँ पारदिष्ट प्रत्येक समघात के गुणांकों में एकघाती होता है और दोनों समघातों का एक संयुक्त-निश्चर होता है। इसको रैखिक-एकघाती निश्चर (lineo-linear invariant) कहते हैं।

उत्तर—$a_o b_n - n a_1 b_{n-1} + \frac{1}{2} n(n-1) a_2 b_{n-2} + \cdots$.

12. प्रमेय 34 और 37 से, सिद्ध कीजिए कि किसी द्विघाती समघात के क्रम में, चरों के किसी भी व्युत्क्रमणीय एकघाती रूपांतरण द्वारा कोई परिवर्तन नहीं होता।

पंद्रहवां अध्याय

अभिलक्षणिक वेक्टर (Latent Vectors)

1. परिचय

1.1. तीन विमाओं वाले वेक्टर—त्रिविम ज्यामिति में, यदि समकोणिक अक्ष $O\xi_1$, $O\xi_2$ और $O\xi_3$ हों, तो किसी वेक्टर $\xi = OP$ के घटक

$$(\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3)$$

होंगे, जो कि अक्षों के सापेक्ष P के निर्देशांक हैं। ξ वेक्टर की लंबाई

$$|\xi| = \sqrt{(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)} \qquad (1)$$

होगी और वेक्टर की दिक्-कोज्याएं (direction-cosines)निम्नलिखित होंगी—

$$\frac{\xi_1}{|\xi|}, \quad \frac{\xi_2}{|\xi|}, \quad \frac{\xi_3}{|\xi|}$$

दो वेक्टर ξ और η, जिनके घटक क्रमशः (ξ_1, ξ_2, ξ_3) और (η_1, η_2, η_3) हैं, लांबिक होंगे यदि

$$\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3=0 \qquad (2)$$

अंततः, यदि $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ और $\mathbf{e}_3$ के घटक क्रमशः

$(1,0,0)$, $(0,1,0)$, और $(0,0,1)$ हों तो (ξ_1, ξ_2, ξ_3) घटकों वाले किसी ξ वेक्टर को यों लिखा जा सकता है—

$$\xi = \xi_1\mathbf{e}_1+\xi_2\mathbf{e}_2+\xi_3\mathbf{e}_3$$

इसके अतिरिक्त (1) से $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ वेक्टरों में से प्रत्येक एकांकी लंबाई (unit length) का है, और (2) से, तीनों वेक्टर परस्पर लांबिक होंगे। हालाँकि ये सब, अक्षों के अनुदिश एकांकी वेक्टर होंगे।

1.2. एक-स्तंभीय मैट्रिक्स—यदि हम किसी वेक्टर को एक एक-स्तंभीय मैट्रिक्स से प्रकट करें तो उपर्युक्त विवरणों का एक बिल्कुल बीजगणितीय निरूपण हमें प्राप्त हो जाता है।

किसी वेक्टर OP को एक एक-स्तंभीय मैट्रिक्स ξ से निरूपित किया जा सकता है जिसके अवयव ξ_1, ξ_2, ξ_3 हैं। वेक्टर की लंबाई इस प्रकार दी जाती है—

$$\sqrt{(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)}. \qquad (1)$$

दो वेक्टरों के लांबिक होने का प्रतिवंध अब एक बिल्कुल मैट्रिक्स रूप धारण कर लेता है। ξ का परिवर्त ξ' एक एक-पंक्ति मैट्रिक्स है जिसके अवयव ξ_1, ξ_2, ξ_3 हैं और

$$\xi'\eta = [\xi_1 \ \ \xi_2 \ \ \xi_3] \times \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$$

एक एक-अवयवी मैट्रिक्स $[\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3]$ है । ξ और η के लांबिक होने का प्रतिबंध, मैट्रिक्स संकेतन में, यों है—

$$\xi'\eta=0. \qquad (2)$$

e_1, e_2, e_3 मैट्रिक्सों को इस प्रकार प्रकट किया जाता है

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};$$

ये परस्पर लांबिक हैं और

$$\xi=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\xi_3e_3.$$

तीन विमाओं से n विमाओं में परिवर्तन सहज है । n चरों के होने पर, एक वेक्टर ξ एक एक-स्तंभीय मैट्रिक्स ऐसा होता है जिसके अवयव यों है :—

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n.$$

वेक्टर की लंबाई की **परिभाषा** इस प्रकार दी जाती है,

$$|\xi| = \surd(\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2), \qquad (3)$$

और जब $|\xi|=1$ तो वेक्टर को इकाई वेक्टर कहा जाता है।

दो वेक्टर ξ और η लांबिक कहे जाते हैं जब—

$$\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\ldots+\xi_n\eta_n=0, \qquad (4)$$

जो, मैट्रिक्स संकेतन में,

$$\xi'\eta=0, \quad \eta'\xi=0 \qquad (5)$$

आदि दो रूपों में से किसी में प्रकट किया जा सकता है।

उसी संकेतन में, जब ξ एक इकाई वेक्टर हो,

$$\xi'\xi=1$$

यहां, और भविष्य में, 1 से तत्समकारी एक-अवयवी मैट्रिक्स का तात्पर्य होगा।

अंत में, इकाई वेक्टर e_r की परिभाषा उस एक-स्तंभीय मैट्रिक्स से दी जाती है जिसकी rवीं पंक्ति में एक और अन्यत्र शून्य हो, इस संकेतन में n वेक्टर e_r $(r=1,\ldots,n)$ परस्पर लांबिक होंगे और

$$\xi=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\ldots+\xi_ne_n.$$

1.3. **लांबिक मैट्रिक्स**—इस उप-परिच्छेद में हम x_r द्वारा

$$x_{1r}, x_{2r}, \ldots, x_{nr}$$

अवयवों वाले किसी वेक्टर, या एक-स्तंभीय मैट्रिक्स को प्रकट करेंगे।

गुणन के क्रम पर ध्यान दीजिए; AB गुणनफल केवल तभी संभव है जब A के स्तंभों की संख्या B की पंक्तियों की संख्या के बराबर हो (दे० छठा अध्याय, परिभाषा 11.) और अतएव गुणनफल $\xi\eta'$ या $\eta\xi'$ संभव नहीं है।

प्रमेय 59. मान लीजिए $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ परस्पर लांबिक इकाई वेक्टर हैं। तो वह वर्ग मैट्रिक्स X, जिसके स्तंभ n वेक्टर $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ हैं, एक लांबिक मैट्रिक्स होगा।

उपपत्ति—मान लीजिए X', X का परिवर्त है। तो गुणनफल $X'X$ यह होगा—

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1r} & x_{2r} & \ldots & x_{nr} \\ x_{1n} & x_{2n} & \ldots & x_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1s} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & \ldots & x_{2s} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & \ldots & x_{ns} & \ldots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

गुणनफल की rवीं पंक्ति और sवें स्तंभ का अवयव, संकलन की परिपाटी के उपयोग से, यों होगा—

$$x_{\alpha r}\ x_{\alpha s}.$$

जब $s=r$ यह एक होगा, क्योंकि $\mathbf{x}_r$ एक इकाई वेक्टर है; और जब $s \neq r$ यह शून्य होगा, क्योंकि $\mathbf{x}_r$ और $\mathbf{x}_s$ लांबिक हैं। अतएव

$$X'X=I,$$

जो n कोटि का तत्समकारी मैट्रिक्स है, और इसलिए X एक लांबिक मैट्रिक्स होगा।

अन्यथा (भिन्न शब्दों में वही उपपत्ति)

X एक मैट्रिक्स है जिसके स्तंभ हैं—

$$\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_s, \cdots, \mathbf{x}_n,$$

जबकि X' एक मैट्रिक्स है जिसकी पंक्तियां है —

$$\mathbf{x}'_1, \cdots, \mathbf{x}'_r, \cdots, \mathbf{x}'_n.$$

गुणनफल $X'X$ की rवीं पंक्ति और sवें स्तंभ का अवयव $\mathbf{x}' \mathbf{x}$ (असल में इस एक-अवयवी मैट्रिक्स का संख्यात्मक मान) है।

मान लीजिए $r \neq s$; तो $\mathbf{x}'_r \mathbf{x}_s=0$, क्योंकि $\mathbf{x}_r$ और $\mathbf{x}$ लांबिक हैं।

मान लीजिए $r=s$; तो $\mathbf{x}'_r\ \mathbf{x}_s=\mathbf{x}'_s\ \mathbf{x}_s=1$, क्योंकि $\mathbf{x}_s$ एक इकाई वेक्टर है। अतएव $X'X=I$ और X एक लांबिक मैट्रिक्स होगा।

उपप्रमेय—रूपांतरण $\eta=X'\xi$, या $\xi=X\eta$ में,

[जबकि $X'=X^{-1}$] मान लीजिए

$\eta=\mathbf{y}_r$ जब $\xi=\mathbf{x}_r$. तो $\mathbf{y}_r=\mathbf{e}_r$.

उपपत्ति—मान लीजिए Y वह वर्ग मैट्रिक्स है जिसके स्तंभ हैं $\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_n$. तब चूंकि $\mathbf{y}_r=X'\mathbf{x}_r$ और X के स्तंभ हैं $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$,

$$Y=X'X=I.$$

चूंकि I के स्तंभ $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ हैं, वांछित परिणाम स्पष्ट है।

1.4. एकघात आश्रितता. § 1.3 की तरह, $\mathbf{x}_r$ उस वेक्टर को प्रकट करेगा जिसके अवयव यों हैं

$$x_{1r}, x_{2r}, \cdots, x_{n}.$$

$x_1, \cdots, x_m$ वेक्टर एकघाततः आश्रित होते है यदि संख्याएं $l_1, \cdots, l_m$, सब शून्य नहीं, ऐसी हों जिनके लिए

$$l_1x_1 + \ldots + l_mx_m = 0. \qquad (1)$$

यदि (1) केवल तब सही होता हो जब $l_1, \cdots, l_m$ सब शून्य हों, तो वेक्टर एकघाततः स्वतन्त्र होंगे।

प्रमेयिका 1. **वेक्टरों के किसी सम्मुच्चय में से अधिक से अधिक n एकघाततः स्वतन्त्र हो सकते हैं।**

उपपत्ति—मान लीजिए आपके पास $n+k$ वेक्टर है। यह भी मान लीजिए कि A एक ऐसा मैट्रिक्स है जिसमें ये वेक्टर स्तंभों के रूप में आते है। A का क्रम r, n से अधिक नहीं हो सकता और, प्रमेय 31 से (पंक्तियों के बदले स्तंभों को रख कर) हम A के r स्तंभ चुन सकते हैं और अन्य सब को चुने हुए r स्तंभों के गुणजों के योग की तरह व्यक्त कर सकते हैं।

अन्यथा—मान लीजिए

$$x_s = \sum_{s=1}^{n} x_{rs}e_r \ (s=1, \ldots, n). \qquad (2)$$

एकघाततः स्वतन्त्र वेक्टरों का कोई दिया हुआ समुच्चय $x_1, \cdots, x_n$ है।

डिर्टमिनेंट $|X| = |x_{rs}|$ 0, क्योंकि दिए हुए वेक्टर एकघाततः आश्रित नहीं है।

X_{rs} मान लीजिए X में x_{rs} का सहखंड है; तो, (2) से,

$$\sum_{s=1}^{n} X_{rs}x_s = Xe_r (r=1, \cdots, n). \qquad (3)$$

किसी भी वेक्टर x_p $(p>n)$ का रूप

$$x_p = \sum_{r=1}^{n} x_{rp}e_r,$$

होना चाहिए और इसलिए (3) से, वह $x_1, \cdots, x_n$ वेक्टरों के गुणजों का एक योग होना चाहिए।

प्रमेयिका 2. कोई n परस्पर लांबिक इकाई वेक्टर एकघाततः **स्वतंत्र होते हैं।**

उपपत्ति—मान लीजिए $x_1, \ldots, x_n$ परस्पर लांबिक इकाई वेक्टर हैं। मान लीजिए कि कुछ संख्यात्मक गुणज k_r ऐसे हैं कि

$$k_1x_1 + \ldots + k_nx_n = 0. \qquad (4)$$

x'_s से यदि पूर्व-गुणन करें, जहां s का मान $1, \ldots, n$ में से कोई एक है, तो

$$k_sx_s'x_s = 0,$$

और अतएव $k_s=0$, चूंकि $x'_sx_s=1$. अतएव (4) केवल तभी सत्य होगा जब

$$k_1 = \ldots = k_n = 0.$$

M6CHDte/63—15

अन्यथा—प्रमेय 59 से, $X'X = I$ और अतएव डिटर्मिनैंट $|X| = \pm 1$ इसलिए X के $x_1, \ldots, x_n$ आदि स्तंभ एकघाततः स्वतंत्र होंगे।

2. अभिलक्षणिक वेक्टर (Latent vectors)

2.1. परिभाषा—सबसे पहले हम उस परिणाम को सिद्ध करेंगे जिसका हमने दसवें अध्याय, §7 में संकेत कर दिया था पर जिसका तर्कसंगत निष्कर्ष हम नहीं दे पाए थे।

प्रमेय 60— A मान लीजिए, n पंक्तियों और स्तंभों का कोई वर्ग मैट्रिक्स है और λ कोई संख्यात्मक अचर है। $\mathbf{x}$ यदि n अवयवों का कोई एक-स्तंभ मैट्रिक्स है तो मैट्रिक्स समीकरण

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \tag{1}$$

का, $\mathbf{x}$ का कम से कम एक अवयव वाला, कोई साधन शून्य से भिन्न तब और केवल तभी होगा जब λ, समीकरण

$$|A - \lambda I| = 0 \tag{2}$$

का एक मूल हो।

उपपत्ति—यदि $\mathbf{x}$ के अवयव $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ हैं तो मैट्रिक्स समीकरण (1) निम्नलिखित n समीकरणों के तुल्य है,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_j = \lambda \xi_i \ (i = 1, \ldots, n).$$

$\xi_1, \ldots, \xi_n$ आदि n चरों में इन एकघाती समीकरणों का कोई अ-शून्य साधन तब और केवल तभी होगा जब λ, समीकरण (दे० प्रमेय 11)

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

का एक मूल हो, और (3), पूरे रूप में मात्र (2) है।

परिभाषा— $|A - \lambda I| = 0$, के λ में मूल मैट्रिक्स A के अभिलक्षण मूल होते हैं; जब λ कोई अभिलक्षण मूल है, तो

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

को सतुष्ट करने वाले किसी अ-शून्य वेक्टर $\mathbf{x}$ को मूल λ के संगत **A** का **अभिलक्षणिक वैक्टर** कहा जाता है।

2.2. **प्रमेय** 61— x_r और x_s, मान लीजिए दो ऐसे अभिलक्षणिक वेक्टर हैं जो मैट्रिक्स A के दो विभिन्न अभिलक्षण मूल λ_r और λ_s के संगत हैं। तो

(i) x_r और x_s सदैव एकघाततः स्वतंत्र होंगे, और

(ii) जब A सममित होगा तो, x_r और x_s लांबिक होंगे।

उपपत्ति—परिकल्पना से

$$Ax_r=\lambda_r x_r, \quad Ax_s=\lambda_s x_s. \tag{1}$$

(i) मान लीजिए k_r, k_s ऐसी संख्याएं हैं कि

$$k_r x_r + k_s x_s = 0. \tag{2}$$

तो, चूंकि $Ax_s=\lambda_s x_s$, (2) से

$$Ak_r x_r = -\lambda_s(k_s x_s)=\lambda_s(k_r x_r),$$

और अतः, (1) से,

$$k_r\lambda_r x_r = k_r\lambda_s x_r.$$

दूसरे शब्दों में, यदि (2) सत्य हो तो,

$$k_r(\lambda_r-\lambda_s)x_r=0.$$

परिकल्पना से x_r एक अ-शून्य वेक्टर है और $\lambda_r \neq \lambda_s$. अतएव $k_r = 0$ और (2) का रूप $k_s x_s=0$ हो जाता है। लेकिन, परिकल्पना से, x_s एक अ-शून्य वेक्टर है और इसलिए $k_s= 0$,

अतएव (2) केवल तभी सत्य है जब $k_r=k_s= 0$; और अतः, x_r और x_s एकघाततः स्वतंत्र वेक्टर हैं।

(ii) मान लीजिए $A'=A$. तो, (1) के प्रथम समीकरण से,

$$x'_s A x_r = x'_s \lambda_r x_r. \tag{3}$$

(1) के द्वितीय समीकरण के परिवर्त से,

$$x'_s A' = \lambda_s x'_s,$$

और इससे, चूंकि $A'=A$,

$$x'_s A x_r = \lambda_s x'_s x_r \tag{4}$$

(3) और (4) से,

$$(\lambda_r-\lambda_s)x'_s x_r=0,$$

और इसलिए, चूंकि संख्यात्मक गुणक $\lambda_r-\lambda_s \neq 0$, $x'_s x_r =0$. अतएव x_r और x_s लांबिक वेक्टर ह।

3. द्विघाती समघातों पर अनुप्रयोग

हम जानते हैं कि (दे० बारहवाँ अध्याय, प्रमेय 49) :

$\xi_1,\ldots,\xi_n$ आदि n चरों में किसी वास्तविक द्विघाती समघात $\xi' A\xi$ को एक वास्तविक लांबिक रूपांतरण

$$\xi = X\eta$$

द्वारा समघात

$$\lambda_1\eta_1^2+\lambda_2\eta_2^2+\ldots+\lambda_n\eta_n^2,$$

में लाया जा सकता है जहाँ

$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ आदि $|A-\lambda I|=0$ के n मूल हैं।

अब हम यह सिद्ध करेंगे कि A के अभिलक्षणिक वेक्टरों से रूपांतरण मैट्रिक्स X के स्तंभ प्राप्त हो जाते हैं।

3.1. जब A के n विभिन्न अभिलक्षण मूल हों।

प्रमेय 62—मान लीजिए A एक वास्तविक सममित मैट्रिक्स है जिसके $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ आदि n विभिन्न अभिलक्षण मूल हैं । तो n विभिन्न वास्तविक इकाई अभिलक्षणिक वेक्टर $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ ऐसे होंगे जो इन मूलों के संगत होंगे, यदि X वह वर्ग मैट्रिक्स है जिसके स्तंभ $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ आदि हैं, तो $\xi_1,\ldots,\xi_n$ चरों से $\eta_1,\ldots,\eta_n$ चरों में रूपांतरण

$$\xi = X\eta$$

एक वास्तविक लांबिक रूपांतरण होगा और

$$\xi' A\xi=\lambda_1\eta_1^2+\lambda_2\eta_2^2+\ldots+\lambda_n\eta_n^2.$$

उपपत्ति—$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ आदि मूल अनिवार्यतः वास्तविक हैं (**प्रमेय** 45) और इसलिए

$$A\mathbf{x}_r = \lambda_r\mathbf{x}_r \qquad (1)$$

को संतुष्ट करने वाले किसी अभिलक्षणिक वेक्टर x_r के अवयवों को वास्तविक सख्याओं† के पदों में ज्ञात किया जा सकता है और, यदि ऐसे किसी वेक्टर की लंबाई k है, तो $k^{-1}\mathbf{x}_r$ एक वास्तविक इकाई वेक्टर होगा जो (1) को संतुष्ट करेगा । अतएव वास्तविक इकाई अभिलक्षणिक वेक्टर $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ आदि की संख्या n होगी और मैट्रिक्स X, जिसके n स्तंभों में ये वेक्टर आते हैं, के अवयवों के रूप में वास्तविक संख्याएं आएंगी।

---

†जब $\mathbf{x}_r$ एक साधन हो और α, वास्तविक या संमिश्र, कोई संख्या हो, तो $\alpha\mathbf{x}_r$ भी एक साधन होगा । फिलहाल हम α के समस्त संमिश्र मानों को छोड़ देते हैं ।

पुनः, प्रमेय 61 से, जब $r \neq s$ तो x_r, x_s के लांबिक होगा और, चूंकि इनमें से प्रत्येक इकाई वेक्टर है,

$$x'_r\ x^s = \delta_{rs}, \qquad (2)$$

जहां $\delta_{rs}=0$ जब $r \neq s$ और $\delta_{rr}=1$ $(r=1,\ldots,n)$. प्रमेय 59 की उपपत्ति की तरह, गुणनफल $X'X$ की rवीं पंक्ति और sवें स्तंभ का अवयव δ_{rs} है; अतः

$$X'X=I$$

और X एक लांबिक मैट्रिक्स होगा।

रूपांतरण $\xi=X\eta$ से

$$\xi'A\xi=\eta'X'AX\eta \qquad (3)$$

और $\eta_1,\cdots,\eta_n$ आदि चरों में समघात का विवेचक $X'AX$ मट्रिक्स है।
अब AX के स्तंभ $Ax_1,\cdots,Ax_n$ हैं, और ये, (1) से, $\lambda_1 x_1,\cdots,\lambda_n x_n$ हैं। अतएव

(i) X' की पंक्तियां $x'_1,\cdots,x'_n$ हैं,

(ii) AX के स्तंभ $\lambda_1 x_1,\cdots,\lambda_n x_n$ हैं और $X'AX$ की rवीं पंक्ति और sवें स्तंभ का अवयव (2) से

$$x'_r\ \lambda_s\ x_s=\lambda_s\ x'_r\ x_s=\lambda_s\ \delta_{rs}$$

का संख्यात्मक मान होगा। इस प्रकार $X'AX$ के मुख्य विकर्ण के अवयव $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ और अन्यत्र शून्य होगा। समघात $\eta'(X'AX)\eta$ इसलिए यों होगा,

$$\lambda_1\ \eta_1^2+\lambda_2\ \eta_2^2+\cdots+\lambda_n\ \eta_n^2.$$

3.2. जब A के पुनरावृत्त अभिलक्षण मूल हों।

वास्तव में, सच तो यह है कि, $|A-\lambda I|=0$ के मूल चाहे पुनरावृत्त हों या समस्त मूल विभिन्न हों, समामित मैट्रिक्स A के सदैव n परस्पर लांबिक वास्तविक इकाई अभिलक्षणिक वेक्टर $x_1,\cdots,x_n$ होंगे और, चूंकि X वह मैट्रिक्स है जिसके स्तंभ ये वेक्टर हैं, रूपांतरण $\xi=X\eta$ एक वास्तविक लांबिक रूपांतरण ऐसा होता है जिससे

$$\xi'A\xi=\lambda_1\eta_1^2+\cdots+\lambda_n\eta_n^2,$$

जहां $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ आदि अभिलक्षण समीकरण $|A-\lambda I|=0$ के n मूल (इनमें से कुछ कदाचित् समान) हैं।

यहां उपपत्ति नहीं दी जाएगी। असली कठिनाई यह सिद्ध* करने की है कि, जब (मान लीजिए) λ_1, $|A-\lambda I|=0$ का एक k-गुण मूल है तो, λ_1 के संगत एकघाततः स्वतंत्र अभिलक्षणिक वेक्टरों की संख्या k होगी। n परस्पर लांबिक इकाई वेक्टरों के किसी निकाय को, श्मिट के लांबिकन प्रक्रम† द्वारा, या उसके तुल्य निम्नलिखित प्रक्रम द्वारा स्थापित किया जा सकता है।

---

*Quart. J. Math. (oxford) 18 (1947) 183-5 म जे० ए० टॉड द्वारा प्रस्तुत उपपत्ति दी गई है; उसी में पृ० 186–92 में डब्ल्य० एल० फरार द्वारा भी विवेचन किया गया है। संख्यात्मक उदाहरणों को, वेक्टरों का पता लगाकर, आसानी से हल किया जा सकता है; दे० पन्द्रहवीं प्रश्नावली में 11 और 14 को।

†दे० डब्ल्यू० एल० फरार, फायनाइट मैट्रिसेज़, प्रमेय 29।

मान लीजिए $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_3$ तीन दिए हुए वास्तविक एकघाततः स्वतंत्र वेक्टर हैं। k_1 ऐसा चुनिए कि $k_1\,\mathbf{y}_1$ एक इकाई वेक्टर हो और मान लीजिए $\mathbf{x}_1=k_1\mathbf{y}_1$. अचर α ऐसा चुनिए कि

$$\mathbf{x}'(\mathbf{y}_2+\alpha\mathbf{x}_1)=0; \tag{1}$$

अर्थात्, चूंकि $\mathbf{x}'_1\,\mathbf{x}_1=1$, $\alpha=-\mathbf{x}'_1\,\mathbf{y}_2$. ‡

चूंकि $\mathbf{y}_2$ और $\mathbf{x}_1$ एकघाततः स्वतंत्र हैं, वेक्टर $\mathbf{y}_2+\alpha\mathbf{x}_1$ शून्य नहीं होगा और इसकी लंबाई शून्य से भिन्न, मान लीजिए l_2 होगी। मान लीजिए

$$\mathbf{x}_2=l_2^{-1}\,(\mathbf{y}_2+\alpha\mathbf{x}_1).$$

तब $\mathbf{x}_2$ एक इकाई वेक्टर होगा और, (1) से, वह $\mathbf{x}_1$ के लांबिक होगा।

अब β और γ ऐसे चुनिए कि

$$\mathbf{x}'_1\,(\mathbf{y}_3+\beta\mathbf{x}_1+\gamma\mathbf{x}_2)=0 \tag{2}$$

और

$$\mathbf{x}'_2(\mathbf{y}_3+\beta\mathbf{x}_1+\gamma\mathbf{x}_2)=0. \tag{3}$$

अर्थात्, चूंकि $\mathbf{x}_1$ और $\mathbf{x}_2$ लांबिक हैं,

$$\beta=-\mathbf{x}'_1\mathbf{y}_3\,,\quad \gamma=-\mathbf{x}'_2\,\mathbf{y}_3.$$

वेक्टर $\mathbf{y}_3+\beta\mathbf{x}_1+\gamma\mathbf{x}_2 \neq 0$, चूंकि वेक्टर $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_3$ एकघाततः स्वतंत्र हैं; उसकी एक अ-शून्य लंबाई l_3 होगी और

$$\mathbf{x}_3=l_3^{-1}\,(\mathbf{y}_3+\beta\mathbf{x}_1+\gamma\mathbf{x}_2)$$

होने पर हमारे पास एक इकाई वेक्टर हो जाता है जो, (2) व (3) से, $\mathbf{x}_1$ और $\mathbf{x}_2$ का लांबिक होगा। इस प्रकार तीनों $\mathbf{x}$ वेक्टर परस्पर लांबिक इकाई वेक्टर होंगे।

इसके अतिरिक्त, यदि $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_3$ किसी मैट्रिक्स A के अभिलक्षण मूल λ के संगत अभिलक्षणिक वेक्टर हों, जिसके फलस्वरूप

$$A\mathbf{y}_1=\lambda\mathbf{y}_1,\quad A\mathbf{y}_2=\lambda\mathbf{y}_2,\quad A\mathbf{y}_3=\lambda\mathbf{y}_3,$$

तो

$$A\mathbf{x}_1=\lambda\mathbf{x}_1,\quad A\mathbf{x}_2=\lambda\mathbf{x}_2,\quad A\mathbf{x}_3=\lambda\mathbf{x}_3$$

और $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ मूल λ के संगत परस्पर लांबिक इकाई अभिलक्षणिक वेक्टर होंगे।

4. संरेखता

मान लीजिए ξ एक एक-स्तंभीय मैट्रिक्स है जिसके अवयव $\xi_1,\cdots,\xi_n$ हैं। यही बात और अक्षरों के लिए भी समझ लीजिए। मान लीजिए ये अवयव n समघाती निर्देशांकों के किसी निकाय में किसी बिंदु के चलित निर्देशांक हैं और A कोई दिया हुआ n कोटि का वर्ग मैट्रिक्स है। तब मैट्रिक्स समीकरण

$$\mathbf{y}=A\mathbf{x} \tag{1}$$

‡अधिक सही शब्दों में, α, एक-अवयवी मैट्रिक्स $-\mathbf{x}'_1\,\mathbf{y}_2$ के अवयव का संख्यात्मक मान है। $\mathbf{x}'_1\,\mathbf{x}_1$ और $\mathbf{x}'_1\,\mathbf{y}_2$ दोनों ही एक-अवयवी मैट्रिक्स हैं।

चर बिंदु **x** और चर बिंदु **y** के बीच एक संबंध स्थापित कर देता है।

अब मान लीजिए रूपांतरण $\xi=T\eta$

की सहायता से निर्देशांक निकाय का ξ से η में बदला जाता है, जहां T कोई व्युत्क्रमणीय वर्ग मैट्रिक्स है। **x** और **y** बिंदुओं के नए निर्देशांक **X** और **Y** तब इस प्रकार दिए जा सकते हैं

$$\mathbf{x}=T\mathbf{X}, \quad \mathbf{y}=T\mathbf{Y}.$$

नए निर्देशांक निकाय में संबंध (1) को

$$T\mathbf{Y}=AT\mathbf{X}$$

द्वारा या, चूंकि T व्युत्क्रमणीय है,

$$\mathbf{Y}=T^{-1}AT\mathbf{X} \qquad (2)$$

द्वारा प्रकट किया जा सकता है।

(1) में A को $T^{-1}AT$ की तरह के किसी मैट्रिक्स से व्यक्त करना एक ऐसे ज्यामितीय संबंध पर विचार करने के समान है जिसे किसी भिन्न निर्देशांक निकाय में व्यक्त किया गया हो A के बदले $T^{-1}AT$ की तरह की पुनर्स्थापनाओं का अध्ययन प्रक्षेपीय ज्यामिति में महत्वपूर्ण है। यहां तो हम केवल, प्रमेय 62 के अनुरूप, एक प्रमेय को सिद्ध करेंगे।

4.1. जब A के समस्त अभिलक्षण मूल विभिन्न हों।

प्रमेय 63. मान लीजिए n कोटि के, वर्ग मैट्रिक्स A के $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ आदि n विभिन्न अभिलक्षण मूल हैं और $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ उनके संगत अभिलक्षणिक वेक्टर हैं। मान लीजिए T वह वर्ग मैट्रिक्स है जिसमें ये वेक्टर स्तंभों के रूप में आते हैं। तब†

(i) T व्युत्क्रमणीय होगा,

(ii) $T^{-1}AT=\text{वि}\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$

उपपत्ति (i) T व्युत्क्रमणीय है यह दिखा कर सिद्ध किया जाएगा कि $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ एकघाततः स्वतंत्र हैं।

मान लीजिए $k_1,\ldots,k_n$ ऐसी संख्याएं हैं कि

$$k_1\mathbf{t}_1+k_2\mathbf{t}_2+\ldots+k_n\mathbf{t}_n=0 \qquad (1)$$

तब, चूंकि $A\mathbf{t}_n=\lambda_n\mathbf{t}_n$,

$$A(k_1\mathbf{t}_1+\ldots+k_{n-1}\mathbf{t}_{n-1})=\lambda_n(k_1\mathbf{t}_1+\ldots+k_{n-1}\mathbf{t}_{n-1})$$

अर्थात्,

चूंकि $r=1,\ldots,n-1$ के लिए $A\mathbf{t}_r=\lambda_r\mathbf{t}_r$,

$$k_1(\lambda_1-\lambda_n)\mathbf{t}_1+\ldots+k_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n)\mathbf{t}_{n-1}=0.$$

---

†संकेतन वि $(\lambda_1\ldots,\lambda_n)=\text{diag}\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ उस मैट्रिक्स को प्रकट करेगा जिसके मुख्य विकर्ण के अवयव $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ हों और अन्यत्र सब शून्य हों।

चूंकि $\lambda_1 \cdot \ldots, \lambda_n$ आदि सब विभिन्न हैं, यह

$$c_1k_1t_1+\ldots+c_{n-1}\,k_{n-1}t_{n-1}=0 \qquad (2)$$

जहां $c_1,\ldots,c_{n-1}$ आदि समस्त संख्याएं अ-शून्य हैं।

n के स्थान पर $n-1$ के लिए इसी तर्क की पुनरावृत्ति से

$$d_1k_1t_1+\ldots+d_{n-2}k_{n-2}t_{n-2}=0,$$

जहां $d_1,\ldots,d_{n-2}$ अ-शून्य हैं। ऐसी ही पुनरावृत्ति से, क्रमश:

$$\alpha_1k_1t_1=0, \qquad \alpha_1 \neq 0,$$

परिकल्पना से, t_1 एक अ-शून्य वेक्टर है और इसलिए $k_1=0$.

इसी तर्क को हम यह दिखाने के लिए दुहरा सकते हैं कि किसी एकघातीय संबंध

$$k_2t_2+\ldots+k_nt_n=0$$

में यह निहित है कि $k_2=0$; इत्यादि और अन्तत: हमारे सम्मुख यह परिणाम आ जाता है कि (1) केवल तभी सत्य है जब

$$k_1=k_2=\ldots=k_n=0.$$

इससे यह सिद्ध हो जाता है कि $t_1,\ldots,t_n$ एकघातत: स्वतंत्र हैं और, चूंकि य T के स्तंभ हैं, T का क्रम n होगा और T व्युत्क्रमणीय होगा।

(ii) इसके अतिरिक्त, AT के स्तंभ यों हैं,

$$\lambda_1t_1,\ldots,\lambda_nt_n$$

अतएव† $AT=T\times$वि$(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ और स्पष्ट है कि

$$T^{-1}AT=\text{वि}\ (\lambda_1\ldots,\lambda_n)$$

4.2. जब अभिलक्षण मूल सारे विभिन्न न हों।

यदि A सममित नहीं है, तो यह नहीं मान लेना चाहिए कि $|A-\lambda I|=0$ के किसी k-गुण मूल से k एकघातत: स्वतंत्र अभिलक्षणिक वेक्टर आ जाते हैं। यदि ऐसा हो कि A के $t_1,\ldots,t_n$ आदि n एकघातत: स्वतंत्र अभिलक्षणिक वेक्टर हों और T में ये वेक्टर स्तंभों के रूप में आते हैं, तो, जैसा प्रमेय में सिद्ध किया गया है,

$$T^{-1}AT=\text{वि}\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$$

चाहे समस्त λ विभिन्न हों या न हों।

---

†यदि आवश्यक हो, तो निम्नलिखित मैट्रिक्स गुणनफल को पहले ज्ञात कर लीजिए—

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

दूसरी तरफ, n कोटि के सारे ही वर्ग मैट्रिक्सों के n एकघाततः स्वतंत्र अभिलक्षणिक वेक्टर नही हुआ करते। हम कुछ सरल उदाहरणों से इसका दृष्टान्त देंगे।

(i) मान लीजिए

$$A=\begin{bmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}.$$

अभिलक्षण समीकरण $(\alpha-\lambda)^2=0$ होगा और x_1 तथा x_2 घटकों वाला एक अभिलक्षणिक वेक्टर x ऐसा होना चाहिए जो $Ax=\alpha x$ को संतुष्ट करेगा; दूसरे शब्दों में,

$$\alpha x_1+x_2=\alpha x_1,\quad \alpha x_2=\alpha x_2.$$

प्रथम समीकरण से, $x_2=0$ और $\mathbf{Ax}=\alpha\mathbf{x}$ को संतुष्ट करने वाले मात्र अ-शून्य वेक्टर

$$\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}.$$

के संख्यात्मक गुणज होंगे।

(ii) मान लीजिए

$$A=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}.$$

एक अभिलक्षणिक वेक्टर **x** पुनः $\mathbf{Ax}=\alpha\mathbf{x}$ को संतुष्ट करेगा। इसके लिए आवश्यक अब केवल यह है कि

$$\alpha x_1=\alpha x_1,\quad \alpha x_2=\alpha x_2.$$

दो एकघाततः स्वतंत्र वेक्टर

$$\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

और, वास्तव में, $x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2$ की तरह के समस्त वेक्टर A के अभिलक्षणिक वेक्टर होंगे।

5. क्रमविनिमयी मैट्रिक्स और अभिलक्षणिक वेक्टर।

दो मैट्रिक्स A और B क्रमविनिमय वाले हो भी सकते हैं और नहीं भी; इस अध्याय को हम ऐसे दो काफी सरल प्रमेयों के साथ समाप्त करेंगे जो इन दो संभावनाओं को संबद्ध करते हैं। इससे आगे हम A और B दोनों को n कोटि का वर्ग मैट्रिक्स मानेंगे।

5.1. मान लीजिए A और B में n एकघाततः स्वतंत्र अभिलक्षणिक वेक्टर, $\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_n$ उभयनिष्ठ हैं। मान लीजिए T वह वर्ग मैट्रिक्स है जिसमें ये वेक्टर स्तंभों के रूप में आते हैं।

तब $t_1, \ldots, t_n$ आदि A के अभिलक्षणिक वेक्टर होंगे जो A के (मान लीजिए) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ आदि अभिलक्षण मूलों के संगत होंगे; वे B के अभिलाक्षणिक वेक्टर होंगे जो B के (मान लीजिए) $\mu_1, \ldots, \mu_n$ आदि अभिलक्षण मूलों के संगत होंगे। इसी अध्याय के § 4.1 (ii) की तरह,

AT के स्तंभ $\lambda_r t_r \quad (r=1, \ldots, n)$ हैं,

BT के स्तंभ $\mu_r t_r \quad (r=1, \ldots, n)$ हैं,

और $L=$ वि $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $M=$ वि $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, संकेतन से,

$$AT=TL, \quad BT=TM$$

अर्थात् $T^{-1}AT=L, \quad T^{-1}BT=M.$

स्पष्ट है कि $T^{-1}ATT^{-1}BT=LM=ML=T^{-1}BTT^{-1}AT,$

फलस्वरूप $T^{-1}ABT=T^{-1}BAT$

और, T द्वारा पूर्व-गुणन और T^{-1} द्वारा उत्तर-गुणन के बाद,

$$AB=BA.$$

यही सिद्ध करना था।

प्रमेय 64—n कोटि के दो मैट्रिक्स जिनमें n एकघाततः स्वतंत्र अभिलक्षणिक वेक्टर उभयनिष्ठ होते हैं, क्रमविनिमयी होते हैं।

5.2. अब मान लीजिए कि $AB=BA$. **t** मान लीजिए A का एक अभिलक्षणिक वेक्टर है जो A के किसी अभिलक्षण मूल λ का संगत है। तब $At=\lambda t$ और

$$ABt=BAt=B\lambda t=\lambda Bt. \qquad (1)$$

जब B व्युत्क्रमणीय हो तो $Bt \neq 0$ और यह A का, λ के संगत, एक अभिलक्षणिक वेक्टर होगा। [$Bt=0$ में यह निहित है कि $t=B^{-1}Bt=0$.]

यदि A का, λ के संगत, प्रत्येक अभिलक्षणिक वेक्टर **t** का एक गुणज हो, तो Bt भी **t** का एक गुणज होगा, मान लीजिए,

$$Bt=kt,$$

और **t**, B का एक अभिलक्षणिक वेक्टर होगा जो B के अभिलक्षण मूल k का संगत होगा।

यदि अभिलक्षण मूल λ के संगत, A के एकघाततः स्वतंत्र अभिलक्षणिक वेक्टरों की संख्या m हो,† लेकिन m से अधिक न हो, जो मान लीजिए यों हैं—

$$t_1, \ldots, t_m$$

और चूंकि $At_r=\lambda t_r \; (r=1, \ldots, m)$,

बशर्ते कि $k_1, \ldots, k_m$ सब ही शून्य नहीं हैं, तो

$$k_1 t_1 + \ldots + k_m t_m \qquad (2)$$

† §1.4 से, $m \leqslant n$.

A का, λ के संगत एक अभिलक्षणिक वेक्टर होगा । हमारी इस परिकल्पना से कि एकघाततः स्वतंत्र ऐसे वेक्टरों की संख्या m से अधिक नहीं हो सकती, A का λ के संगत प्रत्येक अभिलक्षणिक वेक्टर (2) के रूप का होगा ।

(1) की तरह, $ABt_r = \lambda Bt_r \quad (r=1,\ldots,m)$

फलस्वरूप Bt_r, A का λ के संगत एक अभिलक्षणिक वेक्टर होगा; अतएव वह (2) के रूप का होगा । अतः कुछ अचर k_{sr} ऐसे अवश्य होंगे कि

$$Bt_r = \sum_{s=1}^{m} k_{sr}\, t_s \quad (r=1,\ldots,m)$$

कुछ अचर $l_1, \ldots, l_m$ होने पर,

$$B\sum_{r=1}^{m} l_r t_r = \sum_{r=1}^{m} l_r \sum_{s=1}^{m} k_{sr} t_s = \sum_{s=1}^{m} \left(\sum_{r=1}^{m} l_r k_{sr} \right) t_s.$$

मान लीजिए θ, मैट्रिक्स

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{mm} \end{bmatrix}$$

का एक अभिलक्षण मूल है । तब कुछ संख्याएं $l_1, \ldots, l_m$ (सब शून्य नहीं) ऐसी होंगी कि

$$\sum_{r=1}^{m} l_r k_{sr} = \theta l_s \quad (s=1,\ldots,m)$$

और, l_r ऐसा चुन लेने पर,

$$B\sum_{r=1}^{m} l_r\, t_r = \theta \sum_{s=1}^{m} l_s\, t_s.$$

अतएव θ, B का एक अभिलक्षण मूल होगा और $\Sigma l_r t_r$, B का θ के संगत एक अभिलक्षणिक वेक्टर होगा; यह A का भी λ के संगत एक अभिलक्षणिक वेक्टर होगा । इस प्रकार हमने यह सिद्ध कर दिया कि†

प्रमेय 65. A, B मान लीजिए n कोटि के वर्ग मैट्रिक्स हैं; मान लीजिए

$|B| \neq 0$ और $AB = BA$.

तो A के प्रत्येक भिन्न अभिलक्षण मूल λ के संगत, A का कम से कम एक अभिलक्षणिक वेक्टर ऐसा अवश्य होता है जो B का भी एक अभिलक्षणिक वेक्टर होता है ।

---

†क्रम-विनिमयी मैट्रिक्सों और उनके सर्वनिष्ठ अभिलक्षणिक वेक्टरों के विस्तृत विवेचन के लिए देखिए; S. N. Afriat, Quart J. Math. (2) 5 (1954) 82–85.

प्रश्नावली पंद्रह

1. Oxyz समकोणिक अक्षों के निर्देशांक में OX, OY, OZ की दिक्‌कोज्याएं (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3) हैं। OX, OY, OZ वेक्टर परस्पर लांबिक हैं। सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}$$

एक लांबिक मैट्रिक्स होगा।

2. चार वेक्टरों के अवयव क्रमशः यों हैं—

$$(a, a, a, a),\ (b, -b, b, -b),\ (c, o, -c, o),\ (o, d, o, -d)$$

इस बात की जाँच कीजिए कि ये सब परस्पर लांबिक होंगे और a, b, c, d के वे धनात्मक मान ज्ञात कीजिए जिनसे ये वेक्टर किसी लांबिक मैट्रिक्स के स्तंभ हो सकें।

3. **x** और **y** वेक्टर लांबिक हैं और **T** एक लांबिक मैट्रिक्स है। सिद्ध कीजिए कि **X=Tx** और **Y=Ty** लांबिक वेक्टर होंगे।

4. **a** और **b** वेक्टरों के घटक (1, 2, 3, 4) और (2, 3, 4, 5) हैं। k_1 ऐसा ज्ञात कीजिए कि

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b} + k_1\mathbf{a}$$

a के लांबिक हो।

यदि $\mathbf{c}=(1,0,0,1)$ और $\mathbf{d}=(0, 0, 1, 0)$, अचर l_1, m_1, l_2, m_2, n_2 इस प्रकार के मालूम कीजिए कि, जब $\mathbf{c}_1=\mathbf{c}+l_1\mathbf{b}_1+m_1\mathbf{a}$, $\mathbf{d}_1=\mathbf{d}+l_2\mathbf{c}_1+m_2\mathbf{b}_1+n_2\mathbf{a}$ हों तो, $\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{d}_1$ आदि चार वेक्टर परस्पर लांबिक हों।

5. किसी वर्ग मैट्रिक्स A के स्तंभ $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_4$ आदि चार वेक्टर हैं और

$$A'A = \text{वि } (\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2, \alpha_4^2).$$

सिद्ध कीजिए कि वह मैट्रिक्स जिसके स्तंभ

$$\alpha_1^{-1}\mathbf{a}_1, \ldots, \alpha_4^{-1}\mathbf{a}_4$$

हैं, एक लांबिक मैट्रिक्स होगा।

6. सिद्ध कीजिए कि (1, −2, 3), (0, 1, −2), (0, 0, 1) अवयवों वाले वेक्टर उस मैट्रिक्स के अभिलक्षणिक वेक्टर होंगे जिसके स्तंभ यों हैं—
(1, 2, −2), (0, 2, 2), (0, 0, 3).

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$,

मैट्रिक्सों के अभिलक्षणिक मूल और अभिलक्षणिक वेक्टर ज्ञात कीजिए, तथा यह भी सिद्ध कीजिए कि (i) प्रथम के केवल दो एकघाततः स्वतन्त्र अभिलक्षणिक वेक्टर होंगे; (ii) दूसरे के $\mathbf{l}_1=(1, 0, 1)$, $\mathbf{l}_2=(0, 1, -1)$, $\mathbf{l}_3=(0, 0, 1)$ आदि तीन एकघाततः स्वतन्त्र अभिलक्षणिक वेक्टर होंगे और यह कि k_1 और k_2 अचरों के किसी भी मान के लिए $k_1 \mathbf{l}_1+k_2 \mathbf{l}_2$ एक अभिलक्षणिक वेक्टर होगा।

8. सिद्ध कीजिए कि, **x** यदि A के एक अभिलक्षण मूल λ के संगत, A का एक अभिलक्षणिक वेक्टर हो और $C=TAT^{-1}$, तो $CTx=TAx=\lambda Tx$ और **Tx**, C के एक अभिलक्षण मूल λ के संगत C का एक अभिलक्षणिक वेक्टर होगा। यह भी सिद्ध कीजिए कि, यदि x और y एकघाततः स्वतन्त्र हों, तो **Tx** और **Ty** भी होंगे।

9. सममित मैट्रिक्स

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

के

$$(1, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

के रूप में तीन इकाई अभिलक्षणिक वेक्टर ज्ञात कीजिए और उस लांबिक रूपांतरण का निगमन कीजिए जिसके फलस्वरूप

$$2x^2-3y^2-3z^2+2yz=2X^2-2Y^2-4Z^2.$$

10. (कुछ कठिन†) x, y, z चरों से X, Y, Z चरों में वह लांबिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जिसके फलस्वरूप

$$2yz+2zx+2xy=2X^2-Y^2-Z^2.$$

11. सिद्ध कीजिए कि द्विघाती समघात

$$2yz+2zx+2xy$$

के विवेचक के अभिलक्षण मूल $-1, -1, 2$ हैं।

सिद्ध कीजिए कि, $\lambda=-1$ के संगत

(i) (x, y, z) एक अभिलाक्षणिक वेक्टर होगा जब भी

$$x+y+z=0;$$

---

†प्रश्न 11 में इसी संकलन को क्रमशः साधन के रूप में विभक्त कर दिया गया है।

(ii) $(1, -1, 0)$ और $(1, 0, -1)$ एकघाततः स्वतन्त्र होंगे और

$(1, -1, 0)$ तथा $(1+k, -k, -1)$

लांबिक होंगे जब $k=-\frac{1}{2}$;

(iii) $a=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $b=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

लांबिक इकाई अभिलक्षणिक वेक्टर होंगे।

सिद्ध कीजिए कि $\lambda=2$ का संगत एक इकाई अभिलाक्षणिक वेक्टर यों होगा—

$$c=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

यदि T एक ऐसा मैट्रिक्स हो जिसमें **a, b, c** स्तंभों के रूप में आते हैं और यदि $\mathbf{x}=T\mathbf{X}$, जहां $\mathbf{x}=(x, y, z)$ और $\mathbf{X}=(X, Y, Z)$, तो इस बात की जांच कीजिए कि

$$2yz+2zx+2xy=-X^2-Y^2+2Z^2.$$

12. सिद्ध कीजिए कि $x=Z, y=Y, z=X$ एक लांबिक रूपांतरण है।

$x_1, \ldots, x_n$ आदि n चरों के होने पर, सिद्ध कीजिए कि,

$x_1=X_\alpha, x_2=X_\beta, \ldots, x_n=X_k$, एक लांबिक रूपांतरण होगा $\alpha, \beta, \ldots, \kappa$ जहां $1, 2, \ldots, n$ का कोई क्रमचय है।

13. ऐसा लांबिक रूपांतरण $\mathbf{x}=T\mathbf{X}$ ज्ञात कीजिए जिससे

$$2yz+2zx=(Y^2-Z^2)\sqrt{2}.$$

14. जब $r=1,2,3,\quad s=2,3,4$ और $\mathbf{x}'A\mathbf{x}=2\sum\limits_{r<s} x_r x_s$,

सिद्ध कीजिए कि A के अभिलक्षण मूल $-1, -1, -1, 3$ होंगे और $(1,0,0,-1)$, $(0, 1, -1, 0)$, $(1,-1,-1,1)$, $(1,1,1,1)$ आदि A के परस्पर लांबिक अभिलक्षणिक वेक्टर होंगे।

उस मैट्रिक्स T को ज्ञात कीजिए जिसके स्तंभ ऐसे इकाई वेक्टर हों जो उपर्युक्त के समांतर (अर्थात् उनके संख्यात्मक गुणज) हों और दिखाइए कि, जब $\mathbf{x}=T\mathbf{X}$, तो

$$\mathbf{x}'A\mathbf{x}=-X_1^2-X_2^2-X_3^2+3X_4^2.$$

15. दिखाइए कि एक लांबिक रूपांतरण† $x=TX$ ऐसा हो सकता है, जिससे

$$2x_1x_3+2x_1x_4-4x_2x_3+4x_2x_4=\sqrt{2}(X_1^2+2X_2^2-2X_3^2-X_4^2).$$

16. n कोटि के, किसी वर्ग मैट्रिक्स A के, n परस्पर लांबिक इकाई अभिलक्षणिक वेक्टर हैं। सिद्ध कीजिए कि A सममित है।

17. निम्नलिखित मैट्रिक्सों के अभिलक्षणिक वेक्टर ज्ञात कीजिए।

$$\begin{bmatrix}1 & 6 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}-2 & -1 & -5\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 6\end{bmatrix}$$

18. मैट्रिक्स A के

$$(1, 0, 0), \quad (1, 1, 0), \quad (1, 2, 3)$$

आदि, $\lambda=1, 0, -1$ आदि अभिलक्षण मूलों के संगत, अभिलक्षणिक वेक्टर हैं। मैट्रिक्स B के, अभिलक्षण मूल $\mu=1,2,3$ के संगत, अभिलक्षणिक वेक्टर भी वही हैं: A और B के अवयव ज्ञात कीजिए और यह सत्यापन कीजिए कि

$$AB=BA.$$

19. A और B दो वर्ग मैट्रिक्स हैं जिनकी कोटि n है; A के n विभिन्न अभिलक्षण मूल $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n$ आदि हैं और B के अ-शून्य अभिलक्षण मूल $\mu_1, \ldots, \mu_n$ आदि हैं, जो अनिवार्यतः विभिन्न नहीं हैं; साथ ही $AB=BA$. सिद्ध कीजिए कि एक मैट्रिक्स T ऐसा होगा जिसके लिए

$$T^{-1}AT=\text{वि } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

$$T^{-1}BT=\text{वि } (\mu_1, \ldots, \mu_n).$$

संकेत और उत्तर

2. $a=b=\frac{1}{2}$, $c=d=1/\sqrt{2}$; इनसे इकाई वेक्टर प्राप्त हो जाते हैं।

3. पहले $X'Y$ ज्ञात कीजिए।

4. $k_1=-\frac{4}{3}$; $l_1=-\frac{1}{2}$, $m_1=-\frac{1}{6}$; $l_2=\frac{1}{2}, m_2=0$, $n_2=-\frac{1}{10}$; दे॰ §3.2.

6. $\lambda=1, 2, 3$.

---

†वास्तविक रूपांतरण नहीं पूछा गया है; वह इतना अधिक कठिन है कि उसके लिए अभी परिश्रम करने की आवश्यकता नहीं है।

7. (i) $\lambda=1, 1, 3$; वेक्टर $(0, 1, -1), (0, 0, 1)$

9. $\lambda=2, -2, -4$; प्रमेय 62 का उपयोग कीजिए।

12. $x=TX$ से प्राप्त होता है—

$x'Ix=X'T'ITX=X'T'TX.$

दिए गए रूपांतरण से $\Sigma x^2=\Sigma X^2$; अतएव $T'T=I$.

13. $\lambda=0, \pm\sqrt{2}$; इकाई अभिलक्षणिक वेक्टर हैं—

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

प्रमेय 62 का उपयोग कीजिए।

16. मान लीजिए $t_1, \ldots, t_n$ वेक्टर है और T में ये t स्तंभों के रूप में आते हैं। §4.1 की तरह,

$T^{-1}AT=$वि $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. लेकिन $T^{-1}=T'$ और अत: $T'AT=$वि $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

एक विकर्ण मैट्रिक्स A स्वयं अपना ही परिवर्त होता है, अतएव

$T'AT=(T'AT)'=T'A'T$ और $A=A'$.

17. (i) $\lambda=-1, 3, 4$; वेक्टर $(3, -1, 0), (1, 1, -4), (2, 1, 0)$.

(ii) $\lambda=1, 2, 3$; वेक्टर $(2, -1, -1), (1, 1, -1), (1, 0, -1)$

18. $$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

19. A के n एकघाततः स्वतन्त्र अभिलक्षणिक वेक्टर हैं (दे० प्रमेय 63), जो B के भी अभिलक्षणिक वेक्टर है (दे० प्रमेय 65)। प्रमेय 64 की तरह समाप्त जिए।

पारिभाषिक शब्द-सूची

अंकन	Labelling; Numbering
अंतर्गत	Inscribed
अंतर्वलन	Involution
अंतर्वलित	Involutory
अखंडनीय	Irreducible
अग्रग विकर्ण	Leading diagonal
अचर	Constant
अद्वितीय	Unique
अद्वितीयरूपेण	Uniquely
अननुकूलनीय मैट्रिक्स	Non-conformable matrix
अनुकूलन	Conformal
अनुकूलनीय	Conformable
अनुप्रयोग	Application
अनुबंध	Suffix
अनुरूप	Analogue
अपरिमेय	Irrational
अभिन्न	Identical
अभिन्न रूप से	Identically
अभिलक्षण/अभिलक्षणिक मूल	Latent roots; Characteristic roots
अभिलक्षण/अभिलक्षणिक संख्या	Characteristic number
अभिलक्षण/अभिलक्षणिक समीकरण	Characteristic equation
अभिलक्षणिक वैक्टर	Latent vactor
अ-शून्य	Non-zero
असंरेखी	Non-collinear
असमघाती	Non-homogeneous
अव्युत्क्रमणीय	Singular matrix
अवकल गणित	Differential Calculus
अवकल गुणांक	Differential coefficient
अवकलन	Differentiation
अवकल संकारक	Differential operator
अवयव	Element

अविरोधी	Consistent
अज्ञात	Unknown
आंतरिक (गुणनफल)	Inner (product); Scalar (product)
आकाश	Space
आकृति	Figure
आगम	Induction
आयताकार	Rectangular
आवर्धित मैट्रिक्स	Augmented matrix
आश्रितता	Dependence
आसन्न विनिमय	Adjacent interchange
इकाई ढाँचे	Unit frames
इकाई मापांक	Unit modulus
उत्क्रम/उल्टा क्रम	Reverse order
उत्क्रमण	Inversion
उत्क्रमता	Reversal
उत्तर गुणन	Post-multiplication
उपप्रमेय	Corollary
उपपत्ति	Proof
उपमैट्रिक्स	Submatrix
उपसारणिक	Minor
उभयनिष्ठ	Common
एक	Unity
एक/एकल	Single
एकघात/एकघाती/एकघातीय	Linear
एकघात प्रतिस्थापन	Linear substitution
एकघातत: स्वतंत्र	Linearly independent
एकघातीय समीकरण	Linear equations
एकवृत्तीय	Concyclic
एकांतरक	Alternants
एकैक संगति	One-to-one Correspondence
एक-पंक्ति/एकपंक्तीय	Single row
एकवत् मैट्रिक्स	Unit matrix
एक-स्तंभ/एकस्तंभीय	Single column
ऐकिक (रूपांतरण)	Unitary (—transformation)
औपचारिक परिभाषा	Formal definition

ऋण; ऋणात्मक	Negative
ऋणात्मक-निश्चित	Negative definite
क्लेरेन्डन	Clarendon
कार्टीजन	Cartesian
कार्तीय	Cartesian
कुल संख्या	Total number
कूर्चिका	Pencil
कोज्या	Cosine
कोटि	Order
कोसाइन	Cosine
क्रम	Rank
क्रमचय	Permutation
क्रमविनिमय नियम	Commutative law
खंड	Factor
गतिकी	Dynamics
गुणज	Multiple
गुणधर्म	Property
गुणनफल	Product
गुणांक	Coefficient
गुरू कोष्ठक	Square bracket
घटक	Component
घन	Cube
घात	Degree
घातांक	Index
चक्रक	Circulant
चतुर्घात; चतुर्घाती	Quartic
चर	Variable
चिह्निका	Signature
ठोस ज्यामिति	Solid geometry
डिर्टमिनेन्ट	Determinant
तथ्य	Facts
तुल्य	Equivalent
दंड	Bar
दक्षिण पक्ष	Right-hand side
दिक्-कोज्या	Direction cosine

द्वि/द्विक	Double
द्विएकघाती	Bilinear
द्विघात समीकरण	Quadratic equation
द्विघाती समघात	Quadratic form
द्विचर त्रिघाती	Binary cubic
द्विपद	Binomial
धन पूर्णसंख्या; धनपूर्णांक	Positive integer
धनात्मक-निश्चित	Positive definite
ध्रुव	Pole
ध्रुवी (शांकव)	Polar (conic)
ध्रुवीय	Polar
नतिपरिवर्तन	Inflexion
निकाय (निर्देशांकों का ...)	System (of coordinates)
निगमन	Deduction
निर्देश-त्रिभुज	Triangle of reference
निर्देशांक	Coordinates
निम्निष्ठ	Minimum
नियत	Fixed
निरपेक्ष निश्चर	Absolute invariant
निहित होना	Implied (to be—)
निश्चर	Invariant
प्रतिच्छेद	Intersection
प्रतिबंध	Condition
प्रतिरूपांतरी (समुच्चय)	Contragredient (sets)
प्रतिलोम (संक्रिया)	Inverse (operation)
प्रतिस्थापन	Substitution
प्रतीक	Symbol
प्रमेय	Theorem
प्रसार	Expansion
प्रक्षेप	Projection
प्राचल	Parameter
पंक्ति	Row
परिकल्पना	Hypothesis
परिकलन	Calculation
परिगत	Circumscribed

परिमित बिंदु	Finite point
परिमेय	Rational
परिवर्त	Transpose
परिवर्तन (अक्षों का—)	Change of axes
परिसर; माला	Range
पारदिष्ट	Transvectants
पुनरावृत्त	Repeated
पुनरावृत्ति	Repetition
पूर्ण वर्ग	Perfect square
पूर्णांक मान	Integer value
पूर्व-गुणन	Pre-multiplication
पूर्वाबिद्ध	Continued
पूरक	Complementary
फलक	Face
फलन; फंक्शन	Function
फील्ड	Field
बहुपद	Multinomial; Polynomial
बहुल बिंदु	Multiple point
बिंदु निर्देशांक	Point coordinates
बिंदुपथ	Locus
बीजीय	Algebraic
भागफल	Quotient
भाजन नियम	Division law
भार	Weight
भिन्न	Fraction
मान	Value
मानक रूप	Standard form
माप	Measurement
मापांक	Modulus
मापीय निश्चर	Metrical invariant
मुख्य विकर्ण	Principal diagonal
मूक अनुबंध	Dummy suffix
मूल	Root

मूल समुच्चय	Fundamental sets
मैट्रिक्स	Matrix
युग्म	Pair
युगपत् (—विनिमय)	Simultaneous (interchange)
योग; जोड़	Addition; sum
रचक	Constituent
रचना-सादृश्य	Homology
रिंग	Ring
रूपांतर	Transform
रूपांतरण	Transformation
रेखा	Line
रेखा-निर्देशांक	Line coordinates
रैखिक-एकघाती निश्चर	Lineo-linear invariant
लंब	Perpendicular
लंबकोणीय प्रक्षेप	Orthogonal projection
लांबिक रूपांतरण	Orthogonal transformation
व्यवकलन	Subtraction
व्युत्क्रम (मैट्रिक्स)	Reciprocal (matrix)
व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स	Ordinary matrix; Non-singular matrix
व्यापक साधन	General solution
व्युत्पन्न (से—)	Derived (from)
वंटन नियम	Distributive law
वज्रानुपात	Cross ratio
वर्ग खंड/वर्गित खंड	Squared factor
वर्ग मैट्रिक्स	Square matrix
वर्णात्मक	Literal
वास्तविक	Real
विन्यास	Configuration
विनिमय	Interchange
विमा	Dimension
विरोधी	Inconsistant
विलोपनफल	Eliminant
विलोम	Converse
विवेचक	Discriminant

विशेष साधन; साधन—विशेष	Particular solution
विषम (संख्या)	Odd (number)
विषम-सममित	Skew-symmetrical
विहित समघात	Canonical forms
वेक्टर ज्यामिति	Vector geometry
स्तंभ	Column
स्पर्शरेखीय निर्देशांक	Tangential coordinates
स्वतंत्र चर	Argument
स्वत: सिद्ध	Self-evident
स्वसंयुग्मी	Harmonic conjugates
स्वातन्त्र्य	Independence
स्वेच्छ	Arbitrary
संकलन	Sum; Summation
संकारक	Operator
संक्रिया	Operation
संकेतन	Notation
संख्या	Number
संख्यात्मक (प्रश्न)	Numerical (examples)
संगत	Corresponding
संगामी	Concurrent
संदर्श	Perspective
संचय	Combination
संपूर्ण वर्ग; पूर्ण वर्ग	Perfect square
संबंधित मैट्रिक्स	Related matrix
संमिश्र/सम्मिश्र	Complex
संयुक्त निश्चर	Joint invariant
संयुग्मी संमिश्र	Conjugate complex
संरेखता	Collineation
संरेखी	Collinear
सम (कोटि)	Even (order)
समघात	Form
समघाती	Homogeneous
समतल वैश्लेषिक ज्यामिति	Plane analytical geometry
समभारित	Isobaric
सममित	Symmetrical

समहरात्मक	Equiharmonic
समानयन	Reduction
समानुपाती	Proportional
समाविष्ट	Belong (to —)
समीकरण	Equation
समीकृत करना	To equate
समुच्चय	Set
सर्वसम	Identically equal
सर्वसम रूप से	Identically
सरणी	Array
सरल रेखा	Straight line
सहखंड	Cofactor
सहखंडज	Adjugate; adjoint
सहचर	Covariant
सहचारी	Associated
सहरूपांतरी	Cogredient
सांत बिन्दु	Finite point
साधन; हल	Solution
साहचर्य	Association
साहचर्य नियम	Associative law
शून्य	Zero
शून्य मैट्रिक्स	Null matrix
शेषफल प्रमेय	Remainder Theorem
हर्मिटीय समघात	Hermitian form
हर	Denominator
हरात्मक कूर्चिका	Harmonic pencil
क्षेत्रीय	Areal
त्रिभुजाकार (प्रिज्म)	Triangular (prism)
त्रिरेखीय	Trilinear
त्रि-विमीय/त्रि-विम	Three-dimensional

M6CH Dte/63—8-3-67—3,000—Sec. I—GIPF.